

EGY APRÓ JÁTÉK KAOTIKUS KALANDJAI – 1. rész

Végh Péter – Vistatec

Izsa Éva – Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium

Az írás egy néhány éve közkedvelt játék, a Fidget Spinner (a cikk további részében spinner) egy, az átlagostól eltérő felhasználási lehetőségét vizsgálja. Mágneseket helyezve a spinnerek végeire, majd egymáshoz közel forgásba hozva őket, a spinnerek gerjesztett, bizonyos kezdőfeltételek mellett kaotikus mozgásokat produkálnak. A cikk célja a mozgásegyenletek felírásával, majd a mozgások szimulálásával a kialakuló mozgások vizsgálata.

A cikk első részében a spinnerek gerjesztett mozgását elemezzük konzervatív és disszipatív esetekben stroboszkopikus leképezések segítségével, és megvizsgáljuk a pillangóeffektust.

A következő hónapban megjelenő második részben a rendszer konzervatív, állandó energiájú fázissterében elemezzük a rendszert Poincaré-leképezést

A cikk szerzői köszönetet mondanak *Tél Tamás* tanár úrnak, akinek kitaratása, biztatása, támogatása, segítségével a cikk nem jöhetett volna létre. Ugyanígy köszönettel tartozunk *Nagy Péter* tanár úrnak a Dynamic Solver program megismeréséért.



Végh Péter a Debreceni Egyetem fizikus szakán szerzett diplomát, majd műfordítással, később pedig szakfordítással foglalkozott. Jelenleg a Google-nak dolgozik nyelvi lektorként.



Izsa Éva azt ELTE-n szerzett matematika-fizika majd informatika szakos tanári diplomát. Jelenleg az ELTE Fizika Doktori Iskola Fizika Tanítása programjának hallgatója, a Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium és a Pestszentlőrinc-Pestszentimrei Felnőttek Általános Iskolája és Gimnáziuma tanára.



1. ábra. A spinner és szerkezete.

alkalmazva, majd egy egyszerű módszert mutatunk be a rendszer Ljapunov-exponensének meghatározására.



Gyakorló tanárként tudjuk, hogy időről időre felüti fejét egy-egy slágerjáték az iskolákban, amellyel a szünetekben és az órákon hetekig, hónapokig szórakoznak tanítványaink. Ilyen volt például a beyblade, a fingerboard (ujjgördeszka), a peonza, az astrojax, de akár a bűvös kocka is még az előző évezredben. Ha már az órán való játék miatt túl vagyunk néhány beíráson, esetleg begyűjtöttünk egy-kettőt az aktuális kutyükből, érdemes ezeket fizikatanári szemmel is megvizsgálni. Elkészen vásárolunk minden ilyen eszközt, és amikor csak lehet, hivatkozunk rájuk tanítás közben, vagy kísérleti eszközként használjuk azokat a feladatokhoz.

Néhány éve volt a diákok körében az aktuálisan menő játék a *Fidget Spinner* – elterjedt magyar nevével sajnos nem találkoztunk (1. ábra).

Az 1. ábra bal oldali képe a dobozból kibontott, eredeti állapotú spinner. A lényeg az 1. ábra másik képén látszik. A középső, kerek, lepattintható műanyag lap alatt egy kis csapágy található. Ha e műanyag lapra letesszük a spinnert, majd megforgatjuk, akkor a forgás a csapágy minimális súrlódása miatt nagyon sokáig fennmarad. A diákok, illetve ügyesebb felnőttek nem az asztalon, hanem valamelyik ujjbegyükön forgatják, extrém vállalkozók forgás közben átdobhatják egyik ujjukról a másikra is.¹

¹Videó linkje a spinnerről működés közben <https://youtu.be/UQmCYTZRktU> illetve a qr-kód segítségével.



Eddig ez „csupán” egy forgó mozgás elég kicsi sűrűdással, esetleg egyensúlyi helyzetek elemzésével vagy a perdület, illetve perdületmegmaradás vizsgálatával. De ha egy-egy gombmágnest helyezünk megfelelő polaritással a spinner-„szirmok” fém részére, amelyek a képen feketének látszanak, majd egymáshoz annyira közel helyezük a spinnereket, hogy forgás közben ne ütközzenek össze, érdekes jelenségeket tapasztalhatunk.²

Ha az egyik spinnert megpörgetjük, esetleg állandó szögsebességű forgásba hozzuk, az a mágneses téren keresztül kölcsönhatásba lép a másik spinnerrel, és az is forogni kezd. Utóbbi forgása szintén a mágneses téren át visszahat az első spinnerre, tehát annak forgása is változhat. A kísérletekben az látszik, hogy ha mindkét spinner szabadon foroghat, akkor mindketten összevissza mozognak, ha pedig az egyiket állandó szögsebességgel forgatjuk, akkor csak a másik mozgása tűnik kiszámíthatatlannak. A mozgások során megfigyelhetők rezgéshez hasonló fázisok, amelyeket átfordulási periódusok követnek. Ezek hossza és jellegük sem ismétlődik, a mozgás nem tűnik előrejelezhetőnek. Lehetséges, hogy ezek az egyszerű eszközök kaotikus mozgást végeznek?

Hogyan hat egymásra ez a két „mágneses” spinner, le tudjuk-e írni a mozgásukat? Ezekre a kérdésekre kerestük a választ. Az eredmény pedig meglepő lett. Gondolnánk-e, hogy ez az egyszerű kis játék a kiindulási állapot kis változtatására merőben eltérően reagál, és a paraméterek minimális változtatásával érdekesebbnél érdekesebb mozgásokat produkál? Eszébe jutna-e a kaotikus mozgások szemléltetésére bármelyikünknek a spinner?

Hogyan vizsgáljuk a spinnereket? Forgathattuk volna mi is az ujjainkon vagy az asztalon azokat, felvehettük volna az elvégzett valós kísérleteket kamerával, elemezhetjük volna azokat például a Tracker programmal vagy hasonló társaival. Ehelyett egy másik utat választottunk. Elkészítettük a dolog matematikai modelljét, vagyis meghatároztuk a mozgást leíró differenciálegyenleteket, amelyeket numerikusan oldottunk meg és ábráztunk egy alkalmas prog-

²A mágneses fidget spinner mozgásai, szöveg és 4 videó: <https://sites.google.com/view/spinner-cikk/tartalom/2-a-m%C3%A1gneses-fidget-spinner-mozg%C3%A1sai>

Az egyes videók elérhetőségei:

1. Mindegyik spinneren 1-1 mágnes, magára hagyottan mozognak az indítás után:
<https://youtu.be/yTeoHt4zQ0A>

2. Mindegyik spinneren 3-3 mágnes, magára hagyottan mozognak az indítás után:
<https://youtu.be/fQGwF6LGgJg>

3. Mindegyik spinneren 1-1 mágnes, az egyiket állandó szögsebességgel forgatjuk:
<https://youtu.be/23VP3QAR7iI>

4. Mindegyik spinneren 3-3 mágnes, az egyiket állandó szögsebességgel forgatjuk:
<https://youtu.be/x4JRBLhM4Hg>



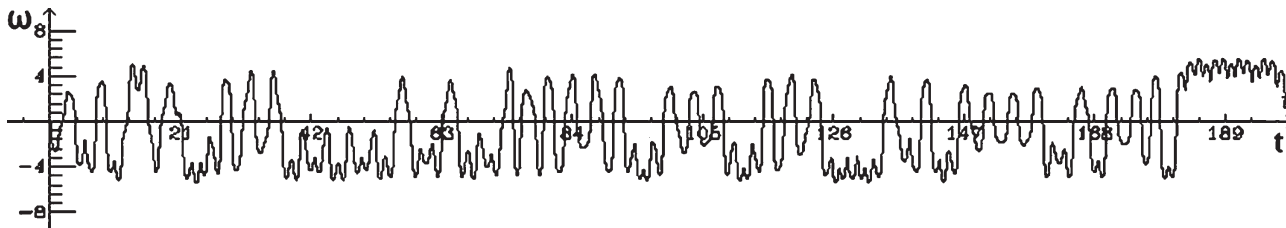
ram [1] segítségével. Vagyis „szimuláltuk” a mozgást az azt meghatározó fizikai törvények segítségével. Miért? Mert egyrészt ezt könnyebb volt kivitelezni, de ami még fontosabb: így sokkal gyorsabban és sokkal több kísérletet tudunk végezni adott idő alatt. Amit tehát csináltunk, az nem más, mint „számítógépes kísérleti fizika”.

A kaotikus mozgások iskolai tanítása számos cikk témája volt már a jelenség általános bemutatásától kezdve [2] elemi kísérletek elemzésén keresztül [3] konkrét mozgásformák bemutatásáig [4–7]. Régóta rendelkezésre áll egy egyetemi tankönyv, amelyet érdeklődő középiskolai tanárok is forgathatnak [8], s az utóbbi években megjelent a tanárok, illetve az ő közvetítésükkel középiskolások egyéni, akár online tanulását segítő anyag is [9, 10]. Ma már hozzáférhető a numerikus mozgáskövetés elemeit iskolásoknak bemutató e-learning oldal [11], s több cikk is foglalkozik egy fejelet, de az elkötelezett diákok által könnyen elsajátítható, s általunk is használt program [12] bemutatásával. A [13] forrásban két konkrét fizikai probléma elemzésének megismerésével juthatnak közelebb az érdeklődők a program megismeréséhez. Cikkünk újdonsága az, hogy egy hétköznapi eszköz, a spinner kaotikusságát kívánja felderíteni.

Egy kis kaotikus bevezetés

Mielőtt beleugranánk a mélyvízbe, érdemes feleleveníteni néhány nélkülözhetetlen fogalmat. A káosz hétköznapi jelentése csak távoli rokonságban áll a fizikai fogalommal, de a fizikai rendszerek kaotikus viselkedése nem kevésbé gyakori, mint mindennapi életünkben a káosz. Egy rendszer mozgását akkor tekintjük első közelítésben kaotikusnak, ha időbeli lefolyása szabálytalan. Egy adott időpillanathoz tartozó állapotból még következtethetünk a következő néhány állapotra, de hosszú távon megjósolhatatlan a rendszer viselkedése. Hogyan jelentkezik ez a spinnerek mozgásában? A későbbiekben részletesebben megismerjük a spinnerek mozgásának szimulációját, és futtattunk néhány számítógépes kísérletet. Ha a gerjesztő spinnert állandó szögsebességgel forgatjuk, azt várnánk, hogy a gerjesztett spinner mozgása is periodikus marad. Lássunk egy eredményt! A 2. ábrán a szabadon forgó spinner szögsebesség–idő grafikonját látjuk, miközben a másik spinnert állandó szögsebességgel forgatjuk. Mindkét spinneren 1-1 mágneset feltételezünk. Az eredmény egy teljes szabálytalanságot mutató, kiszámíthatatlan mozgás.

A káosszal kapcsolatban gyakran felmerül a „pillangóeffektus” [14] fogalma is. A pillangóeffektus azt jelenti, hogy a kaotikus rendszer rendkívül érzékeny a kezdeti feltételekre. Ha a kezdeti feltételeket akár csak nagyon kis mértékben is megváltoztatjuk, az hosszú, vagy akár viszonylag rövid távon is gyökeresen más mozgást eredményez. Ezt a jelenséget is megtapasztalhatjuk az elkészített számítógépes kísérletünkkel.



2. ábra. Egy spinner szimulált szögsebesség–idő grafikonja a másik spinner egyenletes forgatása esetén. A szögsebesség és az idő dimenziótlán egységekben van ábrázolva. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.)

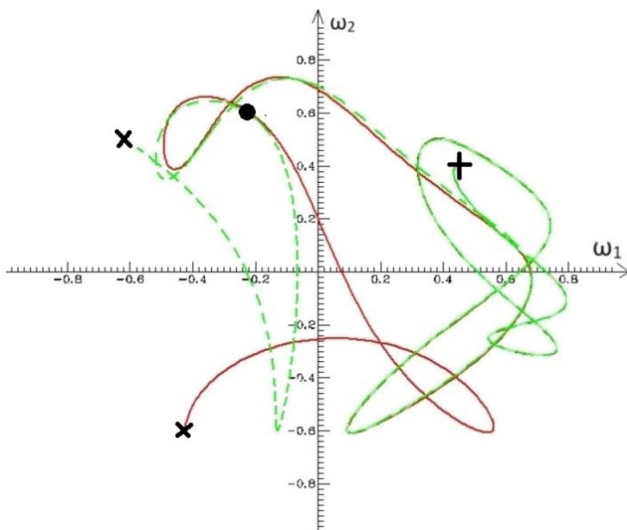
A 3. ábrán két olyan mozgás ω_1 – ω_2 grafikonját ábrázoltuk (azonos időpillanatokban), amelyeknél a paraméterek azonosak voltak, és a kezdőállapotok között csak a két dimenziótlán szögsebesség tért el mindössze 0,001 értékkel, alkalmasan választott egységekben. A két, közel azonos kezdőállapotot az ábrán a + jelzi, a végállapotokat a fekete x-ek, és azt, ahol a 2 mozgás drasztikusan kezd szétválni, egy fekete pont.

Vágjunk bele – azaz az alapok

A spinnerek mozgásának minél érthetőbb leírásához néhány egyszerűsítést alkalmazunk. Csak az egymágneses eseteket vizsgáljuk, és a mágneseket elektromos töltésekkel helyettesítjük. Ez utóbbi közelítés ugyan nem teljesen pontos, de mivel a mágnesek közti tasztítás jellege hasonló az elektromos töltések közti tasztításhoz, bízunk benne, hogy eredményeink jellege is hasonlítani fog a valós jelenséghez. Ez a közelítés gyakori a mágneses ingák mozgásának leírásakor is.

Vizsgáljunk először egy ideális, súrlódásmentes esetet. Ekkor a mágnesek között ható erő az ismert képlettel felírható Coulomb-erő lesz. A Coulomb-erők által a spinnerekre gyakorolt forgatónyomatékok határozzák meg a spinnerek forgását.

3. ábra. Az ω_1 – ω_2 síkon ábrázolt pillangóeffektus, $\omega_{10} = 0,44$ mindkét esetben, $\omega_{20} = 0,4$ a zöld, szaggatott, $\omega_{20} = 0,401$ a piros, folytonos grafikon esetén. A szögsebességek dimenziótlán egységekben vannak ábrázolva. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.)



A 4. ábrán a körvonalakon lévő kék pontok a mágnesek, a körök középpontjai a spinnerek középpontjai, d a középpontok távolsága, φ_1 és φ_2 pedig a mágnesek aktuális helyzetét megadó szög.

Ha az egyik spinnert (a 2. indexűt) állandó szögsebességgel forgatjuk, akkor csak két szabad változónk van: a φ_1 és az ω_1 , hiszen a második spinner mozgását, mint gerjesztő forrást, mi határozzuk meg. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a rendszer *fázistere* ebben az esetben kétdimenziós lesz [8].

Ha mindkét spinner szabadon foroghat, akkor a rendszer állapotát 4 változó határozza meg: a φ_1 és φ_2 , valamint az ω_1 és az ω_2 . Ekkor a rendszer fázistere 4 dimenziós.

A spinnerek forgásának mozgásegyenletei a pillanatnyi forgástengelyükre felírva:³

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = \frac{k Q^2}{m r^3} \frac{-\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \frac{d}{r} \sin \varphi_1}{\left[\left(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 - \frac{d}{r} \right)^2 + [\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2]^2 \right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (I)$$

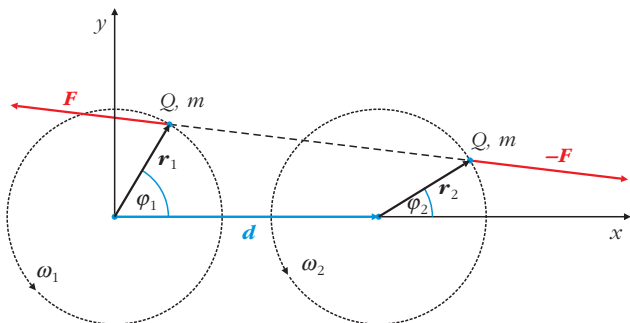
valamint

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = \frac{k Q^2}{m r^3} \frac{-\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \frac{d}{r} \sin \varphi_2}{\left[\left(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 - \frac{d}{r} \right)^2 + [\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2]^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (II)$$

Itt $m = 0,065$ kg a mágneses spinner megmért tömege, amelyet az egyszerűség kedvéért a töltés helyére sűrítve képzelünk el; $r = 0,025$ m a spinnerek sugara, amit a forgástengelytől a mágnesek középig mértünk; $d = 0,06$ m a két spinner középpontjának távolsága, amelyet úgy választottunk, hogy a spinnerek ne akadjanak össze forgás közben, de a mágnesek egymásra való hatása még elég erős legyen; Q a felté-

³A mozgásegyenletek részletes levezetése: <https://sites.google.com/view/spinner-cikk/tartalom/4-a-mozg%C3%A1s-egyenletek-levezet%C3%A9se>





4. ábra. Az elrendezés modellje. F a mágnesek/töltések közötti taszító erő, Q a töltések feltételezett nagysága, r_1 és r_2 a forgástengelyektől a töltésekhez mutató helyvektor.

telezett elektromos (mágneses) töltés nagysága, k a Coulomb-törvényben szereplő állandó.

Q nagyságát az egymástól 1 cm-re levő mágnesek között 1 N erőt mérve számoltuk vissza, így $Q = 10^{-7}$ C.

A kapott egyenletben még sok paraméter szerepel, ezek számát próbáljuk meg csökkenteni. Erre egy hatékony módszer a *dimenziótlanítás* [8], amelynek lényege, hogy az egyenleteket úgy írjuk át, hogy a bennük szereplő változók és paraméterek már ne rendelkezzenek mértékegységekkel, azaz dimenziótlan számok legyenek. Ezzel az is elérhető, hogy a paraméterek száma csökkenjen, és csak annyi paraméter maradjon meg, amennyi a rendszer lényegi leírásához valóban szükséges. Mindehhez elsőként az időt próbáljuk meg dimenziótlanítani. Vagyis az időt mostantól nem másodpercben, hanem egy dimenziótlan számmal, egy „alap időegység” többszöröseként mérjük. Ha az alap időegységet jól választjuk meg, elérhetjük, hogy az egyenletekből bizonyos paraméterek eltűnjenek. Az alap időegységet nevezhetjük a rendszer *karakterisztikus idejének*, hiszen ez általánosságban jellemzi a rendszert.

Az időt tehát úgy dimenziótlaníthatjuk, hogy a t változóról áttérünk egy dimenziótlan t' változóra a következő egyenlet szerint:

$$t = t' \tau,$$

τ lesz a rendszer karakterisztikus ideje, erre a részletes levezetésből

$$\tau = \sqrt{\frac{m r^3}{k Q^2}} \quad (1)$$

kifejezés adódik, ami a mi paramétereink esetén $\tau = 0,1$ s. Vagyis mostantól az időt nem másodpercekben, hanem 0,1 másodperces egységek többszöröseként, dimenziótlan számokban mérjük, és t' -vel jelöljük.⁴

Az idő ilyen választással, valamint a $D = d/r$ – szintén dimenziótlan paraméter – bevezetésével a (I) és (II) mozgásegyenletek a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'_1}{dt'} &= \frac{d^2\varphi_1}{dt'^2} = \\ &= \frac{-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + D \sin\varphi_1}{\left([\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - D]^2 + [\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2]^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2)$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'_2}{dt'} &= \frac{d^2\varphi_2}{dt'^2} = \\ &= \frac{-\cos\varphi_2 \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 + D \sin\varphi_2}{\left([\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - D]^2 + [\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2]^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Itt már az ω'_1 és ω'_2 is dimenziótlan mennyiségek, így már a további grafikonjainkon is mindenhol dimenziótlan mennyiségek szerepelnek.

Látható, hogy így már csupán egyetlen paraméter, a $D = d/r$ határozza meg a mozgás jellegét. Esetünkben $d = 0,06$ m; $r = 0,025$ m; így $D = 2,4$.

Gerjesztett eset

A valóságban és a videókon látható mozgások hű leírásához figyelembe kell vennünk a mindig jelenlévő súrlódási veszteséget. Az előző egyenleteket ekkor egy újabb taggal kell kiegészítenünk, amivel a fellépő súrlódási erőt vesszük figyelembe.

Mi Stokes-féle súrlódást tételezünk fel, azaz olyat, amelyből adódó szögsebesség-változás arányos a szögsebességgel. (Használhattunk volna a sebesség négyzetével arányosat is, az eredmények jellege ugyanolyan lenne.) A Stokes-súrlódást az utolsó tag írja le.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'_1}{dt'} &= \\ &= \frac{-\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + D \sin\varphi_1}{\left([\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 - D]^2 + [\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2]^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \kappa \omega'_1. \end{aligned} \quad (4)$$

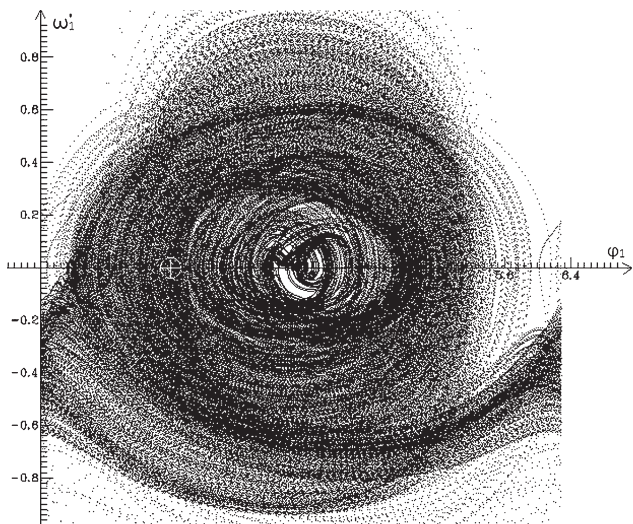
Hasonló egyenlet érvényes a másik spinnerre is, ugyanazzal a κ -val. Az új κ paraméter szemléletes jelentése az, hogy reciproka, $1/\kappa$, az az idő, mely alatt a szögsebesség körülbelül harmadára (pontosabban e-ed részére) csökkenne. Ha például $\kappa = 0,01$, a lecsengési idő 100 egység, ez az érték ezért gyenge súrlódásnak felel meg.

Ha mást nem változtatunk a rendszeren, akkor – ahogy a videókon láttuk – a súrlódás miatt a mozgás leáll. Ennek megakadályozásához pótolnunk kell az elveszett energiát.

Forgassuk a 2. spinnert egy állandó szögsebességgel. Ekkor a (3) egyenlet az egyszerű

⁴A dimenziótlanítás részletes levezetése: <https://sites.google.com/view/spinner-cikk/tartalom/5-a-mozg%C3%A1segyenletek-dimenzi%C3%B3tlan%C3%ADt%C3%A1sa>





5. ábra. A φ_1 - ω'_1 grafikon. $D = 2,4$; $\kappa = 0,02$; $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \pi/2$; $\omega'_{10} = 0$; $\omega'_{20} = 2\pi/20$. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.)

$$\frac{d\omega'_2}{dt} = 0,$$

$$\omega'_2 = \omega'_{20}$$

alakot ölti, a második spinner szögelfordulása pedig

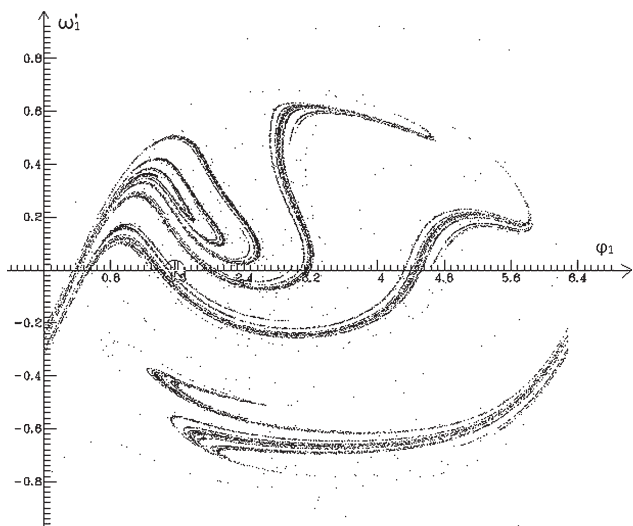
$$\varphi_2 = \omega'_{20} t' + \varphi_{20}$$

lesz, amit a (4) egyenletbe helyettesítve azt látjuk, hogy az 1-es spinner mozgásegyenlete expliciten is függ az időtől, vagyis gerjesztett mozgást ír le. Az összenergia nem csökken örökké, de nem is pontosan állandó, egy átlag körül ingadozik.

A mozgásegyenletet a *Dynamics Solver* [1] program segítségével oldottuk meg, a *Dormand-Prince 8(5,3)* modult használva és $dt = 0,1$ pontosságot választva.

A φ_1 - ω'_1 fázissíkon könnyen tudjuk ábrázolni a mozgást, ám az eredmény eléggé értelmezhetetlen, bonyolult gombolyagként jelenik meg (5. ábra).

6. ábra. Az 5. ábrán látható mozgás képe stroboszkopikus nézetben. $D = 2,4$; $\kappa = 0,02$; $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \pi/2$; $\omega'_{10} = 0$; $T'_{20} = 20$. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.)



A szimulálás során a φ_1 szög 2π -nél nagyobb értékeket is felvehet az átfordulások következményeként. Érdekes azonban a szöget úgy ábrázolni, ahogy szemünk is érzékeli, vagyis $[0; 2\pi]$ intervallumban. Mielőtt a szimulált szög *ebből* az intervallumból kilép, 2π hozzáadásával vagy kivonásával visszataloljuk oda. Ezért látjuk azt, hogy az ábra jobb szélén kilépő vonalak a bal szélén visszalépnak.

Annak érdekében, hogy áttekinthető képet kapjunk a mozgásról a fázistérben, egy olyan technikához folyamodunk, amelyet *stroboszkopikus leképezésnek* [8] nevezünk. Ennek lényege, hogy a fázistérben nem jelenítünk meg minden pillanatot, hanem csak bizonyos pillanatokot, adott időközönként. Mintha egy stroboszkóppal készítenénk felvételeket a rendszer állapotairól. A felvételek időközét érdemes a gerjesztő spinner forgásának T' periódusidejeként megválasztani, azaz $T'_{20} = 2\pi/\omega'_{20}$. A 6. ábra mutatja, hogy mennyire más rajzolatot kapunk ebben a nézetben.

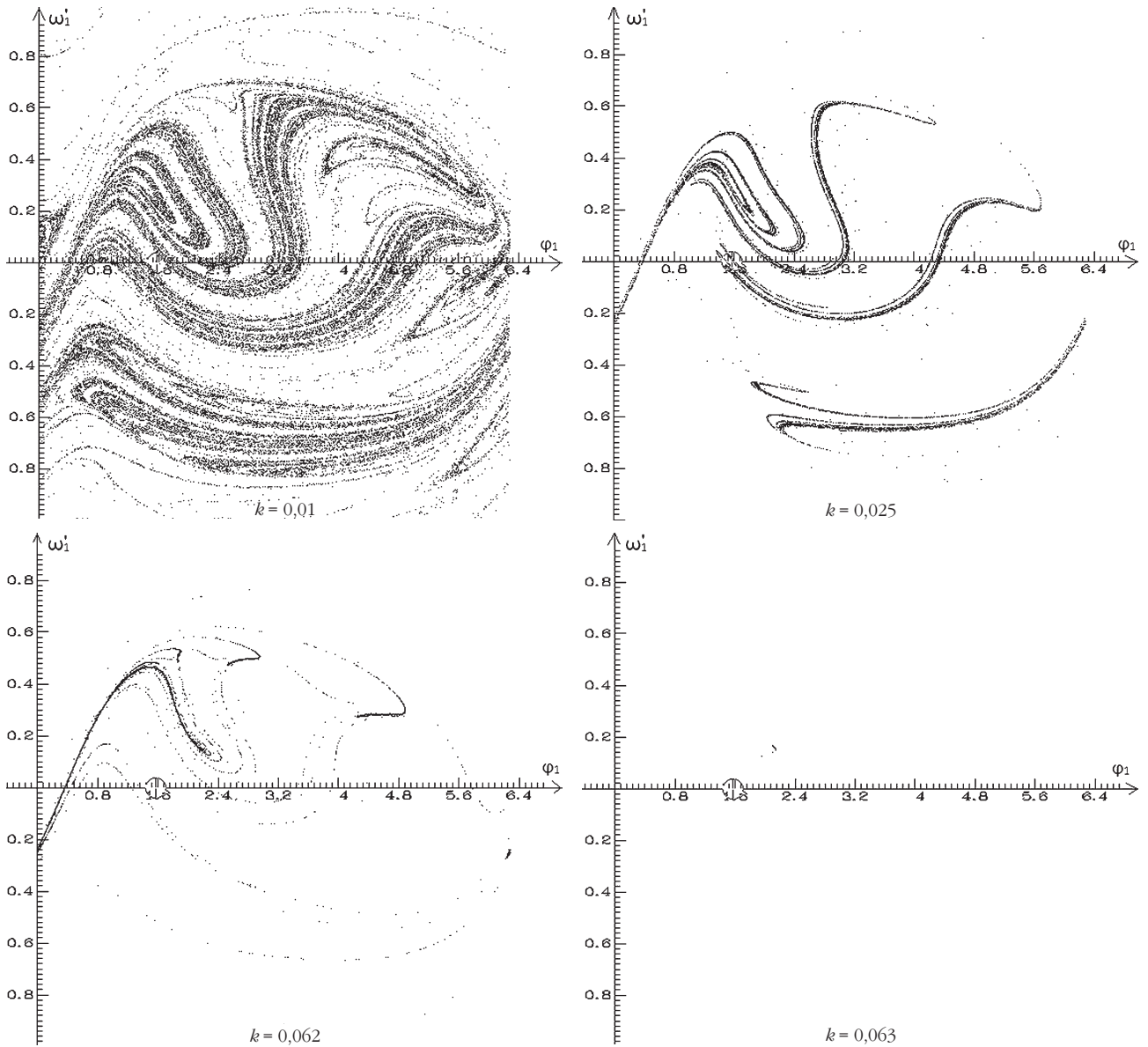
A pontok továbbra is szétszórtan jelennek meg, de a rájuk illeszkedő görbék már nem metszik egymást. Eloszlásuk sem egyenletes, hanem nagy, üres (fehér) tartományok figyelhetők meg. Úgy tűnik, mintha a pontok „ráhúzódnának” egy bonyolult, de jól kivehető geometriai struktúrára, amit *kaotikus attraktornak* [8] nevezünk. Ez a disszipatív káosz fő jellemzője. Részletesebben vizsgálva az történet, hogy bármelyik állapotból is indítjuk el a rendszert, az egy kezdeti „összevisszaság” után ráhúzódik az attraktorra (a sűrű sávra). Az attraktoron a mozgás továbbra is kaotikus marad, mert az attraktoron belül sincsenek zárt görbék. Azt is megfigyelhetjük, hogy a káosz által elérhető tartományok behatároltak (az attraktorra korlátozódnak). Ezért az attraktor ábrázolásakor a kezdőfeltétel nem lényeges, minden kezdőfeltétel ugyanahhoz az attraktorhoz vezet.

Érdekes megemlíteni, hogy a forgó és álló mágneses terek szuperpozíciójával kapott mágneses térben mozgó iránytű esetében is hasonló rajzolatú attraktorok jelennek meg [6, 7].

Ezzel eljutottunk a bevezetőben feltett kérdés megválaszolásához: a közkedvelt játékból egyetlen mágnes felhelyezésével kapott kétszinneres valóságos rendszer kaotikusan forog, hiszen matematikai modellje numerikus szimulálásával minden, a káoszra jellemző tulajdonságot (például pillangóeffektus, fázistér, fázissík, kaotikus attraktor) kimutattunk. Szigorúan véve csak azt az esetet vizsgáltuk, amikor az egyik spinnert forgatjuk. Valószínűsíthető azonban, hogy az egymás terében szabadon forgó két spinner mozgása is kaotikus, ahogy a videók is sugallják, de ez a káosz csak véges ideig tart, végül megszűnik a súrlódásos veszteségek miatt.

A mozgás jellegének függése a paramétereiktől

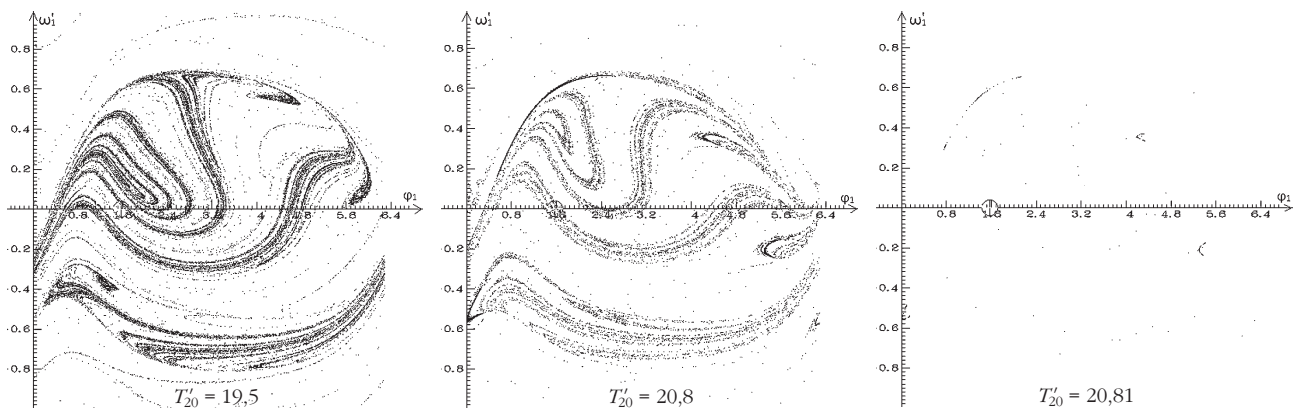
Ahogy κ (a súrlódás) értékét növeljük, az attraktor egyre élesebbé, határozottabbá (és kisebbé) válik. Ez azt jelenti, hogy a súrlódás növelésével a mozgástar-

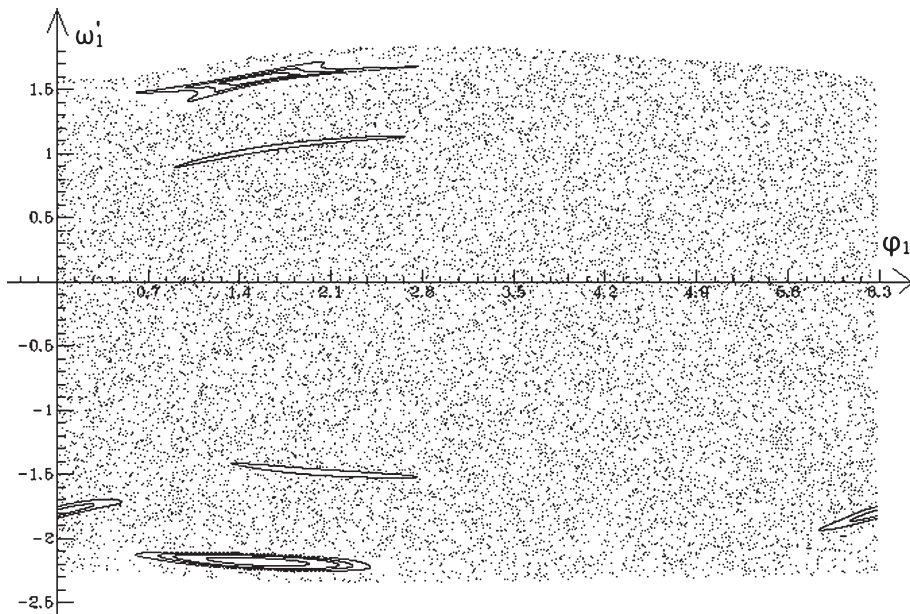


7. ábra. Attraktorok különböző κ együtthatók esetén stroboszkopikus nézetben. Ahogy κ növekszik, a sűrűség egyre nagyobb lesz. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábrák.)

tomány egyre inkább beszűkül. A $\kappa = 0,063$ esetben a stroboszkopikus metszet már csak 1-2, alig észrevehető pont, ami azt jelenti, hogy a mozgás egy rövid átmeneti (*tranzients*) kaotikus mozgás után nagyon

8. ábra. A $\phi_1 - \omega_1'$ grafikonok különböző gerjesztési periódusidők esetén stroboszkopikus nézetben. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábrák.)





9. ábra. Az első spinner súrlódás nélküli mozgásának képe stroboszkopikus nézetben. $\kappa = 0$; $D = 2,4$; $\varphi_{20} = \pi/2$; $T'_{20} = 20$. A szimuláció dt felbontási idejét itt 0,01-re csökkentettük, mert a 0,1-es felbontás már nem volt elegendő a pontos ábrázoláshoz. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.)

A kezdőfeltételek, amelyekkel a fenti ábra különböző komponenseit kaptuk:

φ_{10}	4	1,21	2,04	1,29	1,2	1,25	0,9	2,26	5,95	6,12	2,4
ω'_{10}	1	1,49	1,71	1,54	0,98	-2,51	-2,15	-2,21	-1,88	-1,84	-2,22

gyorsan periodikussá válik. A 7. ábra grafikonjain az attraktor látható különböző súrlódási tényezők (κ) esetén.

A következő lépésben vizsgáljuk azt, hogy mi történik, ha nem a súrlódást, hanem a gerjesztő frekvenciát változtatjuk. (Itt ω'_{20} helyett érdemesebb a gerjesztés $T'_{20} = 2\pi/\omega'_{20}$ periódusidejét paraméternek választani, hiszen majd ez határozza meg a stroboszkopikus leképezés periódusidejét is.)

Azt tapasztaltuk (8. ábra), hogy nagyon szűk az a frekvenciatartomány, amelynél a mozgás kaotikus. $T'_{20} = 19,1$ alatt és $T'_{20} = 20,81$ felett egy rövid kaotikus mozgás után már gyakorlatilag mindig periodikus végállapotot kapunk, ami abban nyilvánul meg, hogy a pontsorozat mindig egyetlen ponthoz konvergál.

A $T'_{20} > 19,1$ tartományban azonban a mozgás hirtelen teljesen kaotikussá válik. Ha T'_{20} értékét tovább növeljük, azt tapasztaljuk, hogy ezek az attraktorok egyre keskenyebbé és egyre élesebbé válnak, akár csak a κ változtatásakor, vagyis a kaotikus mozgás során bejárt tartomány egyre jobban beszűkül. És $T'_{20} = 20,81$ értéknél végül egyetlen pontra zsugorodik, vagyis innentől a mozgás ismét periodikussá válik.

Súrlódásmentes eset

A szimuláció lehetőséget ad olyan „kísérletek” elvégzésére is, amelyeket a valóságban egyáltalán nem, vagy csak nagyon nehezen produkálhatnánk. Ilyen a gerjesztett súrlódásmentes eset, amikor a (4) egyenletben a κ egyúthatót nullának választjuk. A mozgást

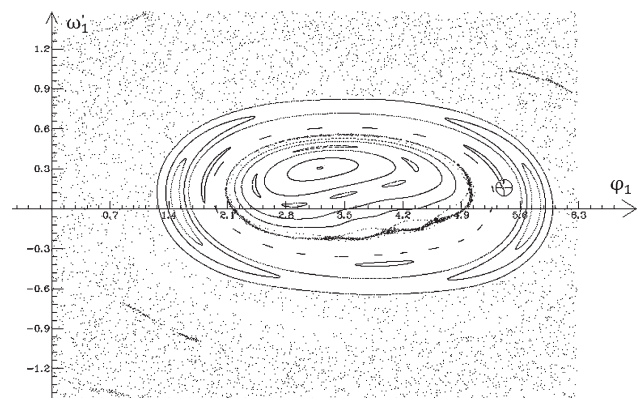
továbbra is a stroboszkopikus leképezésen érdemes követni, s egy tipikus eredményt mutat a 9. ábra.

Az látható, hogy itt már nincs attraktor. A kaotikus ponthalmaz szinte az egész fázisteret betölti, kivéve egyes területeket, amelyeken különféle önmagukba záródó görbék figyelhetők meg. Ha a szimulációt a véletlenszerű ponthalmaz tartományából indítjuk, akkor a pontok ebben a tartományban is maradnak, és nem lépnek be az elszigetelt, strukturált területekre. Ha viszont ezekről a „szigetekről” indítjuk a szimulációt, akkor a keletkező pontok ezeken a szigeteken maradnak, és nem lépnek át a véletlenszerű tartományba. A kétfajta terület tehát teljesen elkülönül, a rendszer számára nem átjárható. Nyilvánvaló, hogy az egyenletes, véletlenszerű ponthalmaz kaotikus

mozgásoknak felel meg. De mit jelentenek a strukturált, zárt görbék? Ha visszagondolunk az 5. és a 6. ábra közti kapcsolatra, rájöhetünk, hogy a stroboszkopikus nézetben látható zárt görbéknek a stroboszkopikus szűrés nélküli ábrán olyan ciklusok sorozata felel meg, amelyek ugyan nem teljesen szabá-

10. ábra. Egy újabb érdekes, súrlódás nélküli eset, $k = 0$; $D = 2,4$; $\varphi_{20} = 1,57$; $T'_{20} = 45$. (A Dynamic Solver program által szolgáltatott ábra.) Az ábrát előállító kezdőfeltételek:

φ_{10}	5,78	5,67	1,87	3,16	4,53	4,03	3,21
ω'_{10}	0,65	-0,25	0,59	-0,14	-0,11	0,19	0,3
φ_{10}	1,92	1,7	4,15	2,65	2,88	3,47	1,05
ω'_{10}	0,47	1,03	-0,64	0,12	-0,78	0,26	-0,18
φ_{10}	2,94	3,47	5,41	1,73	3,01	4,56	4,45
ω'_{10}	-0,73	0,26	0,16	-0,71	-0,81	-0,3	0,12



lyosan követik egymást, de az egymást követő ciklusok eltérése annyira kicsi, hogy a stroboszkopikus nézetben nem szabálytalan, kaotikus pontthalmazt eredményeznek, hanem zárt görbéket (10. ábra). Ezt a mozgást, amely egyfajta átmenet a szigorúan periodikus és a teljesen kaotikus mozgások között, *kvázi-periodikus* mozgásnak nevezzük.

Irodalom

1. Link a Dynamic Solver program letöltéséhez: <https://dynamicsolver.software.informer.com/1.8/>
2. Szatmári-Bajkó I.: „Káoszt”? – Azt! Káoszelmélet a középiskolában. *Fizikai Szemle* 56/11 (2006) 376–380.
3. I. Bajkó: Chaos Physics in Secondary School A Material Applicable in Online Teaching. *Obzory matematiky, fiziky a informatiky* (2021/2) 22.
4. Gruiz M., Radnai Gy. Tél T.: A rugalmas fonálú ingáról – mai szemmel – Vermes Miklós emlékezetére. *Fizikai Szemle* 56/10 (2006) 337–343.
5. Tóthné J. T., Gócz É.: Káosz egy tálban. *Fizikai Szemle* 64/12 (2014) 421–425.
6. Csernovszky Z.: Az iránytű harmonikus rezgésétől kaotikus mozgásáig. *Fizikai Szemle* 67/6 (2017) 198.
7. Z. Csernovszky: From harmonic oscillation to chaotic motion of a compass. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1223 (2019) 012004.
8. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2002).
9. <http://theorphys.elte.hu/fiztan/chaosH>
10. T. Tél: Chaos physics: what to teach in three lessons? *Phys. Educ.* 56 (2021) 045002.
11. <http://theorphys.elte.hu/fiztan/numH>
12. Nagy P., Tasnádi P.: Dynamics Solver – egy hatékony eszköz a káosz kutatásában és tanításában. *Matematikát, fizikát és informatikát oktatók (MAFIOK) 41. országos konferenciája, Konferenciakötet*. Szerk: Talata I., Szent István Egyetem, Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Budapest (2017) 169–178.
13. Z. Csernovszky, P. Nagy, P. Tasnádi: Investigation of chaos in the absence of programming skill. *Canadian Journal of Physics* 98 (2020) 593.
14. J. Gleick: *Káosz, egy új tudomány születése*. Göncöl Kiadó, Budapest (1999).