

A MIKOLA-VERSENY GYÖNGYÖSI DÖNTŐJÉNEK MÉRÉSI FELADATAIRÓL

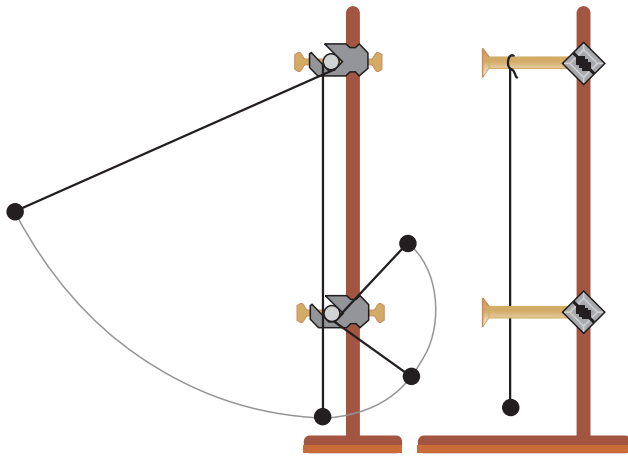
Kiss Miklós
Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium

Az 1980-as új tantervben már kilencedikben megkezdődött a középiskolai fizika. Igen célszerű volt a tehetségek korai felismerése céljából fizikaversenyt rendezni ennek az évfolyamnak is. A Mikola Sándor Országos Középiskolai Tehetségkutató Fizikaverseny először az 1981/82-es tanévben került megrendezésre. A verseny az 1985/86-os tanévtől háromfordulós. Az első két forduló írásbeli feladatokat tartalmaz, a

döntőben már mérni is kell annak az ötven diáknak, aki az első két forduló alapján eljut idáig. A kilencedikesek döntőjének helyszíne a Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium, a tizedikeseké a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium. Az első nap négy számításos feladatot kell megoldani az írásbelin, másnap egy mérést kell elvégezni és erről jegyzőkönyvet készíteni. A fordulók pontértékének az aránya kettő az egyhez.

1995 óta veszek részt a feladatkitűző bizottság munkájában és szervezem a gyöngyösi döntőt. A méréseket akkoriban *Varga István* hozta. Korai távozása után első mérésem 2001-ben szerepelt a gyöngyösi

Köszönettel tartozom *Holics Lászlónak*, aki a mérési feladatlapokat szakmailag ellenőrizte és *Kissné Császár Erzsébetnek*, aki gondosan átnézte és stilisztikailag is ellenőrizte azokat.



1. ábra. A mérési összeállítás.

döntőben. Azóta a 2002. év és a 2020-ban elmaradt verseny kivételével minden évben az én mérésemet kell megoldaniuk a versenyző diákoknak. Felsorolva: Sűrűségmérés vonalzóval; A kötelsúrlódás vizsgálata; Érmék nem centrális ütközésének vizsgálata; Sűrűségmérés; Vizsgálatok érmék centrális ütköztetésének segítségével; Koppantási magasság vizsgálata; Csúszási súrlódás vizsgálata; A súrlódás vizsgálata lejtős ingával; Kémcsőinga lengésidejének vizsgálata; Vizsgálatok gémkapocslánccal; Acélgolyó mozgása körív alakú csőben; Fonálinga vizsgálata; Ütközés vizsgálata érmék nem centrális ütközése alapján; Három-dobókockás mérés; Gémkapocsinga vizsgálata; Pingponglabda ütközésének vizsgálata; A kifeszített lánc vizsgálata; A tapadási súrlódás vizsgálata.

A felsorolt tizenhét döntő méréséből emeltem ki hármát részletes bemutatásra. Ezek: Koppantási magasság vizsgálata (M26); Ütközés vizsgálata érmék nem centrális ütközése alapján (M33); A tapadási súrlódás vizsgálata (M38).

A koppantási magasság vizsgálata

A mérés a közismert feladat alapján adódott: hol helyezzünk el egy ütközőt, hogy a kitérített inga végén lévő kisméretű test körpályán haladjon tovább a fonál ütközése után. Egyszerűnek tűnik a feladat és valóban: számolni egyszerű. A mérés során, ha elérünk egy indítási magasságot, a test a fonál ütközése után tovalendül, és a fonál feltekeredik a szögére akkor is,



Kiss Miklós a Gyöngyösi Berze Nagy János Gimnázium matematika-fizika és számítástechnika tanára, a gimnázium napórájának tervezője, készítője. PhD fokozatát fizikából szerezte, kutatótanár. 1995-től szervezi a Mikola-verseny gyöngyösi döntőjét, a feladatkitűző bizottság tagja, a döntő méréseinek készítője. 2015-től a Bugát Pál Természismereti Vetélkedő zsűrijének tagja. Ericsson-, Mikola- és MTA Pedagógus Kutatói Pályadíjas.

ha a test még nem körpályán halad. A fonál feszessége gyakorlatilag nyomkövethetetlen. Az előzetes vizsgálódások, mérések alapján azonban egy sokkal látványosabb („hallványosabb”) lehetőség adódott: az adott magasságból indított test a fonál ütközése után körpályán halad, majd a fonál ellazulása után ferde hajításnak megfelelő parabolapályán halad. Megfelelő indítási magasság esetén éppen eltalálja az ütközőnek használt szeget és koppan.

A feladat ezek alapján a következő volt: „Az alsó szorítódióba fogott szegnek ütköző fonál megáll, a fagyöngy a maradék fonállal tovább lendül. Ha a gyöngyöt kellő magasról indítjuk (y), ütközés után a feszes fonál az alsó szeg körül körbe megy, és rátekeredik. Valamivel alacsonyabbról indítva a fonál nem tekeredik fel, menetközben lazává válik, és a gyöngy nekikoppan a szegnek – (ez a) koppantási magasság. Az alsó szög magasságát a gyöngy alsó helyzetéhez képest (x) változtatva változik a szükséges indítási magasság. Az indítási magasság mérésében segít a talpas mérőpálca, az alsó szeg magasságának mérésére használd a vonalzót (1. ábra)!”

Adott volt a fagyöngy és az ütközőnek használt szög átmérője.

A várható eredményről számításokat végezhetünk. Ezt nem vártuk el a versenyzőktől, hiszen a szükséges matematika még nem adott kilencedik osztályban. Éppen ezért remélhető volt, hogy valóban mérnek a döntősök.

A 2. ábrán látható jelöléseket alkalmazva (a mérésnél használt y itt h , az x itt r) elsőként meghatározzuk, mekkora szögénél lazul el a fonál.

Az energiamegmaradás alapján:

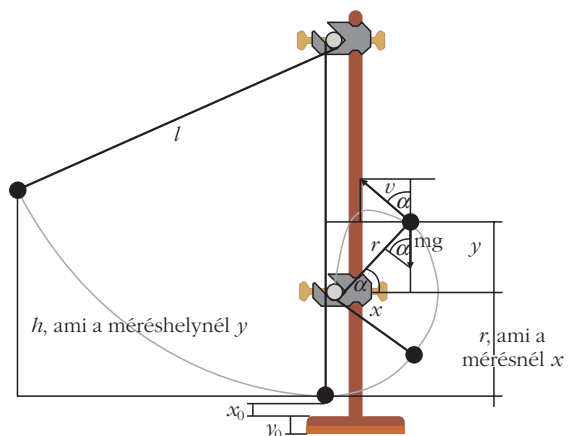
$$m g h = m g r (1 + \sin \alpha) + \frac{1}{2} m v^2.$$

Dinamikai megfontolás, amíg a test körpályán halad:

$$K + m g \sin \alpha = m \frac{v^2}{r},$$

ahol K a kötélerő. Amikor a kötéel éppen nem feszül tovább, akkor $K = 0$. Ebből

2. ábra. A számításnál és mérésnél használt jelölések.



$$g r \sin \alpha = v^2$$

adódik. Ebből és az energetikai feltételből:

$$g h = g r(1 + \sin \alpha) + \frac{g r}{2} \sin \alpha.$$

Végül a

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \frac{h-r}{r}$$

összefüggés kapjuk. Ezzel már leírhatjuk a ferde hajítással induló test mozgását. A sebességkomponensek:

$$v_x = v \sin \alpha \text{ és } v_y = v \cos \alpha - g t.$$

Akkor koppan a gyöngy a tengelynek, ha

$$x = r \cos \alpha = v t \sin \alpha \Rightarrow t = \frac{r \cos \alpha}{v \sin \alpha} \text{ és}$$

$$y = -r \sin \alpha = v t \cos \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Ebbe az időt, és az energiából a sebesség négyzetére kapott összefüggést behelyettesítve:

$$-r \sin \alpha = v \cos \alpha \frac{r \cos \alpha}{v \sin \alpha} - \frac{g}{2} \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{v^2 \sin^2 \alpha},$$

illetve:

$$0 = r \sin \alpha + r \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{g}{2} \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{g r \sin \alpha \sin \alpha}.$$

Ezt rendezve, a koszinuszokat szinuszokkal kiváltva a

$$0 = 3 \sin^2 \alpha - 1,$$

amiből

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}.$$

Ezt és a korábban a szög szinuszára kapott összefüggést egybevetve:

$$\left(\frac{2}{3} \frac{h-r}{r} \right)^2 = \frac{1}{3},$$

amiből a

$$h = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) r \approx 1,866 r$$

összefüggés adódik. Ha figyelembe vesszük, hogy $h \leq l$, akkor az alsó tengely magasságára a

$$r \leq \frac{l}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0,5359 l$$

feltételt kapjuk.

1. táblázat

Az y indítási magasság függése az alsó ütköző szög x helyzetétől (4 mérés eredményei)

x_k (mm)	y_k (mm)	x_k (mm)	y_k (mm)	x_k (mm)	y_k (mm)
53,5	103	92	178	144	288
66,5	133	102	203	151	308
76,5	153	113	223	162	333
88,5	183	128	258	60	113
103	203	139	278	72	138
118	243	149	308	85	163
133	273	162	338	103	203
144	298	60	113	122	233
154	308	71	138	136	273
162	338	82	158	152	308
59,5	123	89	173	168	348
60	113	100	198	185	378
67	128	112	218	200	413
81	158	128	258		

A fagyöngy és a tengely mérete miatt a koppanás egy valójában Δy_k szélességű intervallumon belül valósul meg.

Méréskor sem a tengely, sem a fagyöngy átmérője nem nulla. Gyakorlati okokból nem a h -t (y) és az r -t (x) mérjük, hanem a golyó aljának a magasságát az asztal, illetve a Bunsen-állvány síkja felett. Ezekből számolhatjuk ki a keresett mennyiségeket:

$$x_k = x - x_0 - R + r,$$

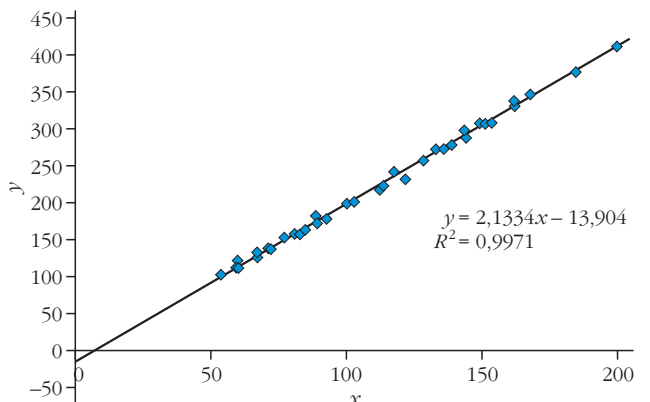
$$y_k = y - y_0 - x_0 + R - R = y - y_0 - x_0,$$

ahol R a fagyöngy, r az ütköző szeg sugara.

Az első feladat a mérés elvégzése volt, vagyis megmérni, hogy az alsó ütköző szög helyzetének változtatása miként befolyásolja a szükséges indítási magasságot, azaz y x -től való függését. Az adatokat táblázatba kellett rendezni (1. táblázat).

A mérési eredményeket grafikonon is kellett ábrázolni, azaz y -t az x függvényében (3. ábra).

3. ábra. A koppanási magassághoz tartozó indítási magasság a körpályára kényszerítő szög helyzete szerint.



A pontok jól illeszkednek egy egyenesre, amelynek egyenlete a mérések alapján: $y = 2,13x - 13,9$. Mivel $y \leq 1$, az előző alapján $x_{\max} \approx 1/2,13 = 0,47 \cdot l$. Ez az érték 45 cm-es ingánál 21,15 cm.

Lehetséges másik megoldás: az ingát vízszintesig kitérítve kell elengedni, és a körpályára kényszerítő szöget emelni a koppanáshoz tartozó helyzetig.

A feszes fonállal való körülfordulás nehezen mérhető, mert a fonál feszülése nehezen állapítható meg, nem különül el, a koppantási magasságot meghaladva feltekeredik a fonál.

A mérés pontosságát befolyásoló tényezőknél szerepet játszik a „hatáskeresztmetszet”. Az eltérítő szög vastagsága, a fagyöngy kiterjedése miatt az indítási magasság mindig egy intervallum (10–15 mm). A papírmérőszalag leolvasása is körülbelül öt milliméter pontosságú. A közegellenállás miatti veszteségek miatt a könnyű fagyöngyöt magasabbról kell indítani, mint egy kisméretű nagy sűrűségű testet.

A mérési feladatot a döntősök tizenöt százaléka hibátlanul megoldotta, de legalább 75 százalékos eredményt ért el a döntősök 63 százaléka. A legalacsonyabb teljesítés 22 százalékos volt. Ezek alapján a mérési feladat elérte célját.

Ütközés vizsgálata érmék nem centrális ütközése alapján

Az ütközési kísérletek igen fontosak a fizikában. Elég, ha a CERN LEP vagy LHC kísérletére gondolunk. Az érmék ütköztetései a legegyszerűbb kísérletek közé tartoznak. Segítségükkel és egy kis ügyességgel mégis sok információhoz juthatunk.

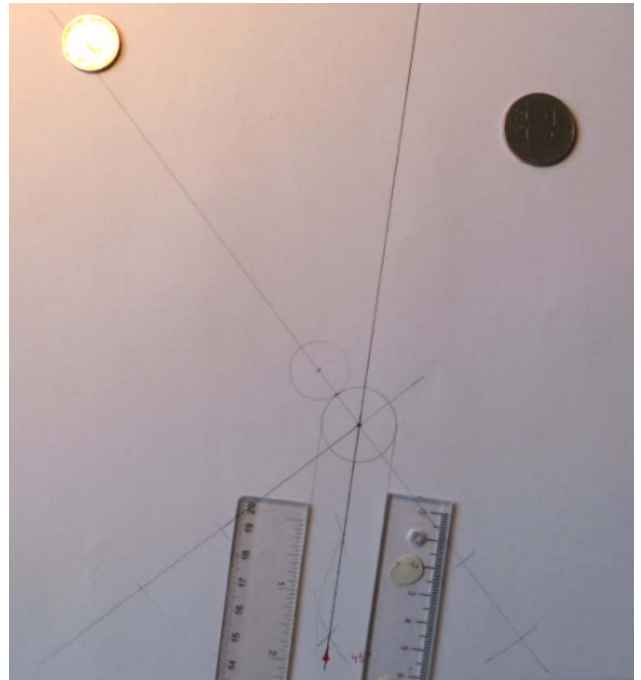
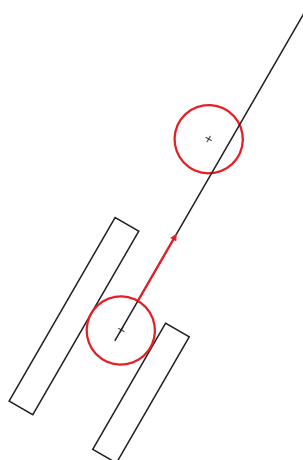
Ez a mérés egy elméleti bevezetővel kezdődött: igazolni kellett, hogy ütközéskor az érme ütközés utáni induló sebessége arányos a megállásig megtett út négyzetgyökével!

$$\mu m g s = \frac{1}{2} m v^2,$$

ebből $2\mu g s = v^2$, ha a μ állandó, akkor $v \sim \sqrt{s}$.

A kísérlet során álló ötvenforintosnak kellett ütköztenni ötvenforintos érmét a 4. ábrán látható elrendezés segítségével. A kiindulási helyeket célszerű előre megszerkeszteni (4. ábra). Az érméket körülrajzoljuk, és a sablonnal megjelöljük a középpontjukat. Vigyázni kell, hogy mindkét érme elmozdulását a megfelelő érme ütközés utáni kezdőhelyzetéhez viszonyítva határozzuk meg! Ügyelni kell, hogy az érkező érmét ütközés utáni mozgá-

4. ábra. A mérési elrendezés vázlatja.



5. ábra. Egy mérés utáni helyzet a kiértékeléshez szükséges jelölésekkel.

sában ne korlátozzák az irányító vonalzókat. Csak az egyik vonalzóat rögzítettük gyurmaragasztóval, a másikat csak kézzel.

A lendület megmaradásával dolgoztunk. Felhasználtuk az érkező érme mozgási irányát.

Egy lehetséges helyzetet mutat az 5. ábra. A 45°-ot megszerkesztve, az ötvenforintosot így indítva. Az érme ütközés után megálltak. Láthatók a bejelölt ütközés utáni és az ütközés előtti helyzetek is. Kiindulásként feltételezzük, hogy a súrlódási együttható azonos a két érme esetén.

Az ütközés utáni elmozdulások nagyságából adódnak az ütközés utáni sebességek önkényes egységben:

$$v_1 \sim \sqrt{s_1} \text{ és } v_2 \sim \sqrt{s_2}.$$

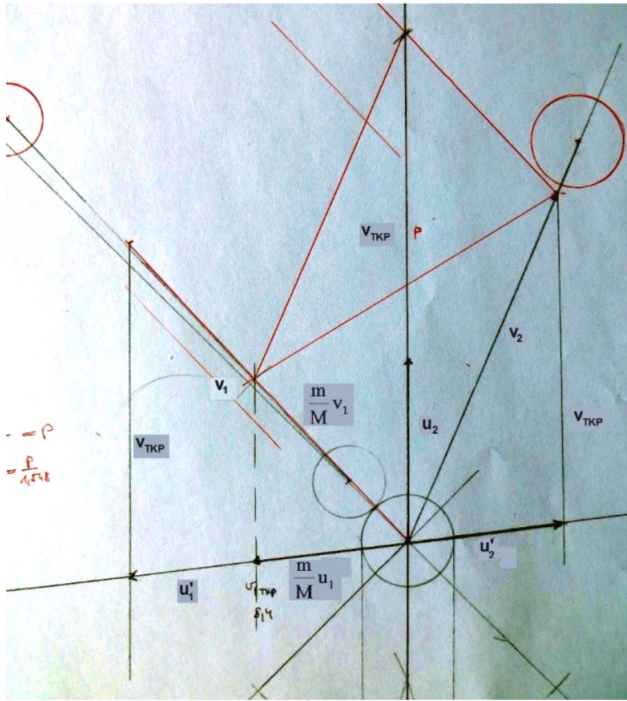
Ami gyakorlatban azt jelentette, hogy hosszúságokat kellett mérni. A lendületmegmaradás törvényéből indulunk ki és átalakíthatjuk:

$$p = p_1 + p_2,$$

$$M v = m v_1 + M v_2,$$

$$v = \frac{m}{M} v_1 + v_2.$$

Ez egy sebességösszeadási szabály, a második test sebességeit vesszük és az első test sebességéből a tömegarányal való szorzással kapott értéket. Ez módot ad a szerkesztésre. Felvesszük a sebességek irányát, felmérjük a nagyságukat. v_2 nagysága és iránya, valamint v iránya segítségével megszerkeszthetünk egy paralelogrammát, amiből adódik $(m/M) v_1$ nagysága. Ha ezt összehasonlítjuk v_1 nagyságával,



6. ábra. A kiegészített mérőábra.

megkapjuk a tömegek arányát:

$$\frac{m}{M} = \frac{v_2}{v_1}$$

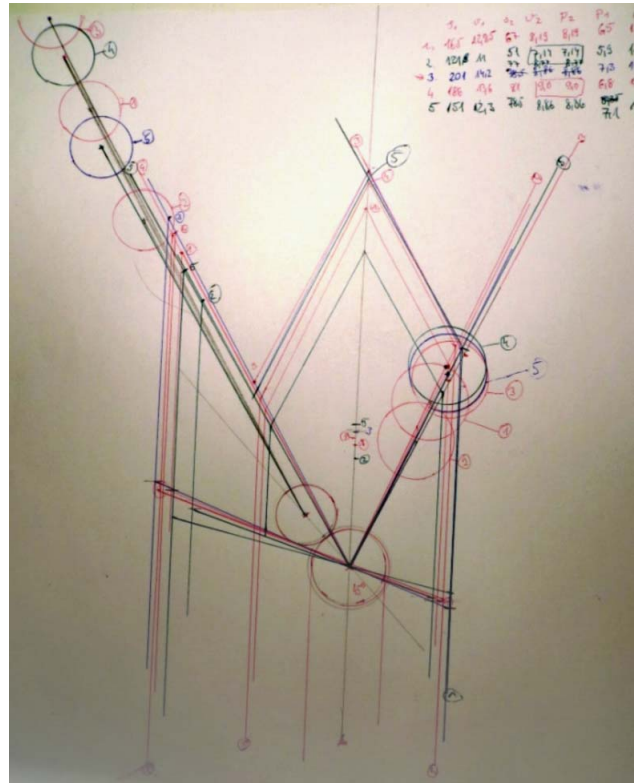
A tömegarány ismeretében meghatározhatjuk a tömegközéppont sebességét:

$$(m + M) v_{TKP} = m v_1 + M v_2 = M v,$$

ebből

$$v_{TKP} = \frac{M v}{m + M} = \frac{v}{\frac{m}{M} + 1}$$

Ha ezt vektoriálisan kivonjuk a sebességekből (szer-



7. ábra. Mérőábra több mérés után.

kesztés), megkapjuk a tömegközépponti rendszerbeli sebességeket u, u'_1 és u'_2 . $u = u_2 = v - v_{TKP}$, ez itt egyszerű kivonás.

A tömegközépponti rendszerben $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 = 0$, ezért $m u_1 + M u_2 = m u'_1 + M u'_2 = 0$. Itt ugyancsak képezhetjük a sebességszabályt:

$$\frac{m}{M} u_1 + u_2 = \frac{m}{M} u'_1 + u'_2 = 0.$$

Az egyenlet két oldalán szereplő két-két vektor az ábrán ellentett vektor, hiszen összegük nulla.

Mivel a szerkesztésből az adódik, hogy ezek ellentétes irányúak és egyforma nagyok, a súrlódásra tett feltevésünk helytálló. Most már számolhatjuk az ütközési számot is:

A nem centrális ütközés mérésének adatai															2. táblázat
	s_1	v_1	s_2	v_2	p_2	p_1	p	m	v_{TKP}	p_{2TKP}	p_{2TKP}	k	s	ϵ	α
1.	149	12,21	131	11,45	11,45	6,7	15,3	0,55	9,88	55	46	0,836	234,1	0,91	66
2.	165	12,85	67	8,19	8,19	6,5	13,0	0,51	8,63	44,5	35,4	0,796	169,0	0,89	54
3.	121	11,00	51	7,14	7,14	5,9	11,5	0,54	7,49	40	32,5	0,813	132,3	0,88	58
4.	201	14,18	78,5	8,86	8,86	7,3	14,4	0,51	9,51	49	39	0,796	207,4	0,88	58
5.	186	13,64	81	9,00	9,00	6,8	13,9	0,50	9,28	42	36,5	0,869	193,2	0,90	56
6.	151	12,29	78,5	8,86	8,86	7,1	14,1	0,58	8,94	51,5	38,5	0,748	198,8	0,83	58
								átlag:	0,53			0,809		0,88	58,33
								szórás:	0,03			0,041		0,03	4,08

$$k = \frac{P_{2TKP}}{P_{TKP}} = \frac{u'_2}{u_2} = \frac{u'_1}{u_1}.$$

Az energiaarány:

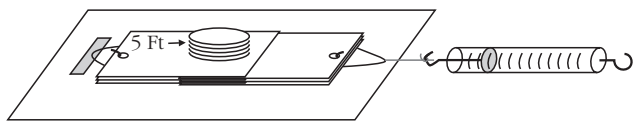
$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M v_2^2}{\frac{1}{2} M v^2} = \frac{\frac{m}{M} v_1^2 + v_2^2}{v^2} = \frac{m}{M} s_1 + s_2,$$

ahol s az érkezési sebesség négyzetéből adódik. A mérés adatait a 2. táblázat mutatja.

A két érme tömegaránya 0,555. A mérés alapján 0,53-nak adódott.

Ahogy az előbb jeleztük, mivel a TKP rendszerben a két érme lendülete ellentétes irányú, és ugyanolyan nagyságú, a feltevés helyes. (Ha ez nem teljesül, akkor a mérés vagy a szerkesztés hibás!)

Ez a mérés nem volt könnyű. Mégis volt hét döntős, aki nyolcvan százalék körüli eredményt ért el. Legalább ötven százalékban sikeres volt 32 diák, a döntősök 64 százaléka. Csak hét diák nem ért el negyven százalékos eredményt. Ezek alapján a mérési feladat elérte célját.



8. ábra. A tapadási súrlódás-mérés elrendezése.

A tapadási súrlódás vizsgálata

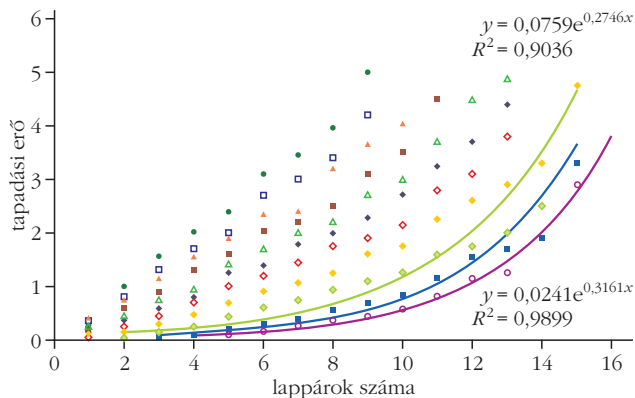
Az autók egytárcsás tengelykapcsolójával szemben a motorkerékpárokban a tengelykapcsoló lemezkötegeket tartalmaz. Érdekes megvizsgálni az ilyen tapadási súrlódást is. A 8. ábra mutatja a mérési összeállítást. Vastagabb papírlapocskákat teszünk egymásra felváltva az asztalhoz rögzített és a rugós erőmérőhöz kötött kampók segítségével. A lapocskákat összenyomó erőt ötforintosok segítségével biztosítjuk. Azt vizsgáljuk, hogy adott terhelés esetén az erőmérőt húzva, mekkora a maximális erő, mielőtt a lapocskák megmozdulnak.

Különböző (L) számú lapocskapárt a megadott módon felváltva egymásra helyezve, különböző számú ötforintossal terhelve, mérjük a maximális tapadási erőt az n éremszám függvényében. A mérési eredményeket a 3. táblázat tartalmazza.

3. táblázat															
L számú lapocskapárt n számú ötforintossal terhelve a newtonban mért maximális tapadási erő.															
$n \setminus L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1					0,1	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,8	1,15	1,25	1,9	2,9
2			0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,55	0,7	0,85	1,15	1,55	1,7	1,9	3,3
4		0,05	0,15	0,25	0,45	0,6	0,75	0,95	1,1	1,25	1,6	1,75	2	2,5	4,75
6		0,15	0,3	0,45	0,7	0,9	1,05	1,25	1,6	1,75	2,25	2,6	2,9	3,3	
8	0,05	0,25	0,45	0,7	1	1,2	1,45	1,75	1,9	2,15	2,8	3,1	3,8		
10	0,1	0,35	0,6	0,8	1,25	1,4	1,8	2	2,3	2,7	3,25	3,7	4,4		
12	0,15	0,45	0,75	0,95	1,4	1,7	2	2,2	2,7	3	3,7	4,5	4,9		
14	0,2	0,6	0,9	1,3	1,6	2,05	2,2	2,5	3,1	3,5	4,5				
16	0,25	0,75	1,15	1,55	1,9	2,35	2,4	3,2	3,65	4,05					
18	0,35	0,8	1,3	1,7	2	2,7	3	3,4	4,2	4,85					
20	0,4	1	1,55	2	2,4	3,1	3,45	3,95	5						
$m =$	0,015	0,058	0,083	0,105	0,117	0,151	0,159	0,182	0,224	0,239	0,274	0,143	0,165		
$b =$	-0,146	-0,211	-0,190	-0,177	-0,003	-0,026	0,100	0,174	0,036	0,292	0,554	0,799	0,888		

Az alsó két sor az állandó lappár mellett, növekvő terheléssel lineárisan emelkedő tapadási súrlódási erő illesztett m meredeksége és b tengelymetszete.

4. táblázat															
Az 1, 2, illetve 3 newton F tapadási súrlódási erőzt biztosító érmék száma különböző L lappárszám mellett.															
$F \setminus L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 N		20	15	12	8	7	6	4	3	3					
2 N				20	18	14	12	10	9	7	5	5	4		
3 N						20	18	15	13	12	9	7	7	5	1



9. ábra. A tapadási erő maximumának függése a lappárok számától.

A 3. táblázatból kigyűjtöttük az 1, 2, illetve 3 newtonhoz legközelebbi értékekhez tartozó érme és lappár számot, ez szerepel a 4. táblázatban. Az erő lappárok számától való függését adott éremszám mellett a 9. ábra grafikonja mutatja.

Egy, illetve négy érme esetén az erő függése a lappárok számától:

$$F = 0,0241 \cdot e^{0,3161L}, \text{ illetve } F = 0,0759 \cdot e^{0,2746L},$$

ahol L a lapok száma. Itt a versenyzőktől csak grafikont kértünk. Az exponenciális függés kis terhelés esetén jól látszik.

Az erő éremszámától való függését adott számú lappár esetén a 10. ábra grafikonja mutatja.

A grafikonok lineárisak. A lapok számának növelésével nő a meredekség. Például 5, illetve 8 lap esetén:

$$F_5 = 0,1174n - 0,0029, \text{ illetve } F_8 = 0,1818n + 0,1741,$$

ahol n az ötforintos érmék száma.

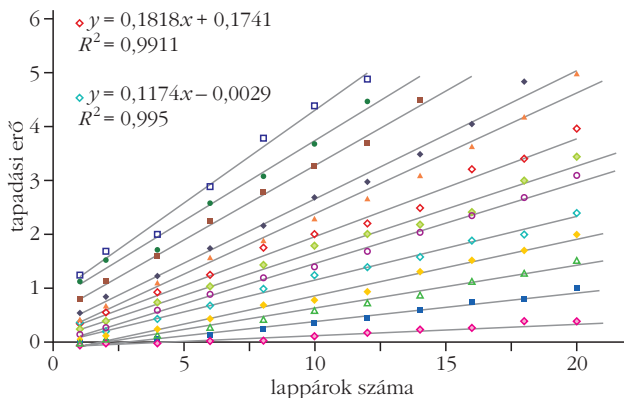
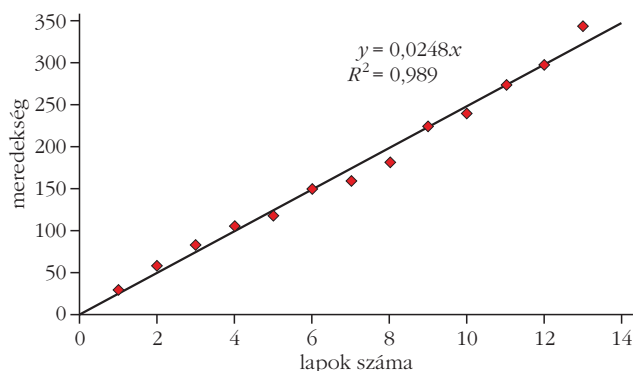
Megvizsgálható e lineáris függvények m meredekségének kapcsolata az L lappárok számával (11. ábra), eredményül $m = 0,0248 \cdot L$ értéket kaptunk.

Az egyes függvények extrapolációjával megbecsülhetjük, hogy adott eszközzel már nem mérhető esetekben mekkora lenne a maximális tapadási súrlódási erő.

Például 15 lappár esetén a meredekségből $F = 5,6$ N adódik, de figyelembe véve, hogy a tengelymetszet is változik, ezen erőre 7 N adódik.

A 4. táblázat alapján az azonos erőhöz tartozó lappár és éremszámot („izofortis”) mutató grafikont a 12. ábra jeleníti meg. Az adatok alapján láthatóan

11. ábra. Az egyenesmeredekségek függése a lappárok számától.



10. ábra. A maximális tapadási erő függése a terhelést jelentő érmék számától.

görbéket illeszthetünk, amire a mérés keretében persze nem volt szükség, pusztán a kapcsolat meglétének a felismerése volt cél.

A 48 döntős közül 16 fő, vagyis a döntősök harmada ért el legalább ötven százalékos eredményt. Két tanuló gyakorlatilag hibátlan mérést készített. Hatan voltak, akik nem érték el a harminc százalékot.



A három általam kiemelt mérés más és más szempontból volt tanulságos. Az első egy érdekes fizikai probléma jól mérhető változata, a második egy alapvető fizikai folyamat alapos vizsgálatának lehetősége nagyon egyszerű eszközökkel, a harmadik pedig egy gyakorlatban fontos probléma és vizsgálatában rejlt lehetőségek bemutatása.

Öröm, hogy mindig voltak nagyon jól mérő diákok. A mérés másik célja az érdeklődés felkeltése. Én úgy láttam, amikor ismertettem a mérések lehetséges megoldását a „Hogyan kellett megoldani a mérési feladatot” programpont során, hogy a diákokat érdekelték a mérési feladatok.

Irodalom

1. Kiss Miklós: A mérési feladat. In: Mikola Sándor Országos Tehetségkutató Fizikaverseny 2007–2011. Vermes Miklós Fizikus Tehetségápoló Alapítvány, Sopron (2011) 60–65.
2. Miklós Kiss, Mikola Competition. International Conference on Teaching Physics Innovatively. Budapest, Hungary, 17–19 Aug., 2015.
3. Mérési feladatlap: https://www.gemscape.net/mikola/index.php?p=2018/2019_8_meres.pdf
4. Mérési feladatlap: http://www.leoweypecs.hu/mikola/19_3_9_meres.pdf

12. ábra. Az egyenlő erőkhöz tartozó érme- és lappárszámok.

