

AZ EÖTVÖS-INGA KÉPLETEI

Cserti József

ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

Dávid Gyula

ELTE, Atomfizikai Tanszék

Idén, az „Eötvös Loránd-émlékév” [1] keretében emlékezünk arra, hogy *Eötvös Loránd* éppen száz éve, 1919. április 8-án hunyt el. A kiemelkedő fizikus, geofizikus, tanár és közéleti ember egyik legfontosabb hozzájárulása a fizikához az általa tervezett speciális inga, a nemzetközileg is ismert *Eötvös-inga*. A hírnév annak köszönhető, hogy egyrészt az ingával nagy pontossággal lehet kimérni a Föld gravitációs erőterének helyi változásait, másrészt Eötvös és munkatársai jelentősen javították a súlyos és tehetetlen tömeg azonosságának korábban mért pontosságát. Egyebek között erre az azonosságra épül *Einstein* általános relativitáselmélete. Ugyanakkor fontos hangsúlyozni, hogy Eötvös munkássága nem csak az ingájára korlátozódik. Ez a rendkívül gazdag életmű szerencsére ma már egybegyűjtve megtalálható az interneten [1, 2], és így az érdeklődő olvasó bővebb képet kaphat Eötvös szerteágazó tevékenységéről.

Eötvös az 1900. évi párizsi világtkiállításra készülve írta meg cikkében az Eötvös-ingával történő mérési eljárást [3]. Sajnos, itt az ingára ható forgatónyomaték képletének levezetése nem szerepel. Egy 1922-es cikkben *Shaw* és *Lancaster-Jones* [4], majd 1934-ben *Miller* [5], jóval később, 1959-ben *Kolossvary* [6] részletes levezetést adtak a forgatónyomatéokra, de a matematikai formalizmus – a külön komponensekben felírt egyenletek miatt – meglehetősen régies és nagyon hosszadalmas.

A Göttingeni Egyetem Beneke Díjalapítványának felhívására – amelynek célja a súlyos és tehetetlen tömeg azonosságának minél pontosabb kísérleti kimutatása volt – 1909-ben Eötvös, *Pekár* és *Fekete* küldött be pályamunkát (amellyel a díjat el is nyerték). Ennek a cikknek a szerzőtársak által, Eötvös halála után átdolgozott 1922-es változatában [7] sem szerepel az ingára ható forgatónyomaték képletének levezetése.

Köszönetünket szeretnénk kifejezni *Horváth Gábornak*, *Sólyom Jenőnek*, *Timár Gábornak*, *Tichy Gézának*, *Tóth Gyulának*, *Ván Péternek* és *Völgyesi Lajosnak* a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért.



Cserti József 1982-ben végzett ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtestfizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az Atomoktól a csillagokig előadás-sorozatot középiskolásoknak.

De *Renner János* 1935-ös [8], majd a jóval későbbi összefoglaló cikke [9], és meglepő módon *Boniolo* 1992-es munkája [10], ami sokban egyezik *Renner János* előbb említett cikkeinek angol nyelvű változatával (bár nincs rá hivatkozás), sem tartalmazza a forgatónyomaték sokat idézett képletének levezetését.

Magyar nyelven az Eötvös-kísérletek geofizikai alkalmazásairól az érdeklődő olvasónak *Völgyesi Lajos Fizikai geodézia és gravimetria* című online tankönyvét [11] és *Szabó Zoltán Az Eötvös-inga története* című cikkét [12] ajánljuk. Ám a szerzők ezekben a munkákban sem ismertetik a forgatónyomaték képletének levezetését.

Az olvasó azt gondolhatná, hogy az ingára ható forgatónyomaték képletének levezetése számos cikkben, illetve könyvben megtalálható. Igyekeztünk gondosan áttekinteni az irodalmat, és bizonyára találhatunk még más olyan művet is, amelyben szerepel a részletes levezetés. Ugyanakkor a fenti irodalmi áttekintés alapján, figyelembe véve a napjainkban megjelent munkákat is, talán kijelenthetjük, hogy a levezetések csak kevés helyen szerepelnek részletesen, és azokban is meglehetősen régies matematikai formalizmust használnak. Ezért talán nem haszontalan, sőt időszerű újra átgondolni a számolást, a levezetés megismétlését a mai, modern matematikai formalizmus segítségével. Ahogy látni fogjuk, ez a levezetés rendkívül egyszerű, és így a korábbi szükségtelenül bonyolult képletek nélkül, könnyeben megérthetjük az inga fizikájának alapját is. Reméljük, hogy az itt bemutatott számolás hiánypótló lesz a hazai egyetemi oktatásban, és így nagyobb hangsúlyt kaphat az Eötvös-inga fizikájának elmélete mind a fizikus, geofizikus és geológus hallgatók, mind az oktatók körében. Szeretnénk kiemelni, hogy e cikkben nem célunk az Eötvös-ingával kapcsolatos kísérleti háttér és a hibaforrások kiküszöbölésének taglalása, e témában a cikkben felsorolt hivatkozások lehetnek hasznosak az olvasónak.

Az alább, *Merev testre külső erőterben ható forgatónyomaték általános képlete* fejezetben bemutatott levezetés tudomásunk szerint az idén ötven éves Ort-



Dávid Gyula több mint 42 éve oktatja az ELTE fizikus hallgatóit. Kutatómunkájában relativisztikus dinamikával foglalkozik. A NYIFFF fizikaverseny alapítója, az Ortvay Rudolf Fizikaverseny és az Atomcsill előadás-sorozat társszervezője, ez utóbbinak sokszoros előadója. Számos ismeretterjesztő fizikai és kozmológiai előadása terjed a neten. Hisz abban, hogy a fizikusok világ nagy esze előbb-utóbb betölti a táguló teret – ahogy az a Fizikus nótában is szerepel (amit nem mellékesen ő írt).

vay Rudolf Problémamegoldó verseny 1982. évi 17. számú, *Dávid Gyula* által kitűzött feladatának megoldásában [13] jelent meg először. A megoldás egy része egy általános képlet levezetése volt a gravitációs tér által tetszőleges tömegeloszlásra ható forgatónyomatékra, amit a jobb követhetőség érdekében alább megismétlünk. Itt jegyezzük meg, hogy később, nagyon hasonló levezetéssel *Horváth Gábor Fizikai Szemlében* megjelent cikkében is szerepel az általános képlet [14].

A következőkben az ingára ható kétfajta forgatónyomaték hatását fogjuk számba venni. Egyrészt az általános képlet alapján kiszámoljuk a gravitációs tér hely szerinti változásából (gradienséből) származó forgatónyomaték irodalomban sokat idézett formuláját (lásd *Az Eötvös-ingára ható forgatónyomaték a nehézségi gyorsulás hely szerinti változása következtében* fejezetet). Másrészt meghatározzuk azt a forgatónyomatékot, ami a gradiensektől függetlenül akkor hatna, ha nem teljesülne a súlyos és tehetetlen tömeg azonossága (lásd *Az Eötvös-inga és az ekvivalenciaelv* fejezetet). A levezetések koordináta-rendszertől függetlenek, egyes esetekben a tengelyeket azért rögzítjük, hogy összehasonlíthassuk a kapott képleteinket az Eötvös, Pekár és Fekete sokat idézett cikkében [7] szereplő eredménnyel. Reméljük, hogy ezzel a munkával mi is hozzájárulunk az Eötvös-inga fizikájának jobb megértéséhez.

Merev testre külső erőterben ható forgatónyomaték általános képlete

E fejezetben meghatározzuk a nehézségi erőter egy merev testre kifejtett forgatónyomatékát. A test \mathbf{r} helyvektorú pontjában (a koordináta-rendszer origója egyelőre a merev test tetszőleges pontja lehet) a nehézségi gyorsulás (a nehézségi erőter által az egységnyi tömegre kifejtett erő):

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1)$$

ahol $U(\mathbf{r})$ a nehézségi erő potenciálja (ez tartalmazza a gravitációs és a centrifugális erő potenciálját is) a test \mathbf{r} pontjában. Megjegyezzük, hogy Eötvös idejében az (1) egyenletben még nem használták a negatív előjelet, ez a végeredményben egy előjelkülönbséghez fog vezetni. A test $d^3\mathbf{r}$ térfogatú, $\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ tömegű részére ható nehézségi erő:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{g}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d^3\mathbf{r},$$

és a rá ható forgatónyomaték járuléka:

$$d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F},$$

ahol $\rho(\mathbf{r})$ a merev test sűrűségeloszlása (1. ábra). Így a teljes merev testre a külső nehézségi erőter által kifejtett forgatónyomaték:

$$\mathbf{M} = \int_{\text{test}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \int_{\text{test}} [\mathbf{r} \times \mathbf{g}(\mathbf{r})] \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad (2)$$

ahol az integrálást (itt és a továbbiakban is) a teljes testre kell elvégezni. A levezetés további részében – a jobb áttekinthetőség érdekében – célszerű áttérnünk az indexes jelölésre, és alkalmazzuk a szokásos Einstein-konvenciót, azaz az automatikus összegzést az azonos indexekre. Az erőter a kis méretűnek feltételezett merev testen belül csak kis mértékben változik, és ezért a nehézségi gyorsulást első rendig sorbafejthetjük a testben elhelyezkedő origó körül:

$$\mathbf{g}_m(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_m(\mathbf{0}) + (\partial_p \mathbf{g}_m) x_p, \quad (3a)$$

ahol

$$\begin{aligned} \partial_p \mathbf{g}_m &= \left. \frac{\partial \mathbf{g}_m(\mathbf{r})}{\partial x_p} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = -\partial_p \partial_m U = \\ &= -\left. \frac{\partial^2 U(\mathbf{r})}{\partial x_p \partial x_m} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3b)$$

és x_p az \mathbf{r} helyvektor p -ik komponense ($p = 1, 2, 3$).

A \mathbf{g} gravitációs gyorsulás fenti, sorfejtett alakját a (2) egyenletbe beírva kapjuk:

$$\begin{aligned} M_k &= \int_{\text{test}} \varepsilon_{klm} x_l [\mathbf{g}_m(\mathbf{0}) + (\partial_p \mathbf{g}_m) x_p] \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \\ &= \varepsilon_{klm} \mathbf{g}_m(\mathbf{0}) \int x_l \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \\ &\quad + \varepsilon_{klm} \partial_p \mathbf{g}_m \int x_l x_p \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4)$$

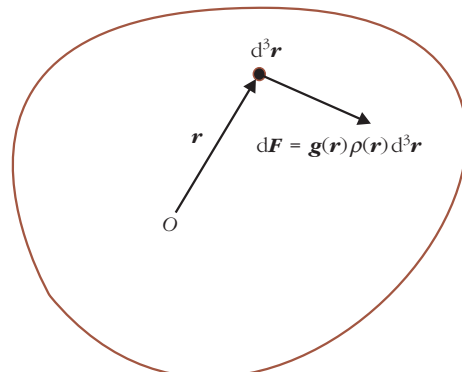
ahol ε_{klm} a Levi-Civita-szimbólum. Az átalakításnál az integrál mindkét tagjából kiemeltük a Levi-Civita-szimbólumot, az első tagból emellett az állandó $\mathbf{g}_m(\mathbf{0})$ értéket, a második integrálból pedig az ugyancsak állandó $\partial_p \mathbf{g}_m$ tényezőt. Az első integrálban, ami az

$$\int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

vektor l -ik komponense, felismerhetjük az origóból a test tömegközéppontjába mutató \mathbf{s} vektor és a test teljes

$$m = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

1. ábra. Egy tetszőleges alakú és tömegeloszlású merev testre ható nehézségi erő elemi járuléka.



tömegének szorzatát. Ezért az integrál első tagja $\mathbf{s} \times m\mathbf{g}(\mathbf{0})$ alakba írható, ennek fizikai jelentése a teste re ható teljes nehézségi erő origóra vonatkozó forgatónyomatéka.

A második integrált átalakíthatjuk egy zérus értékű tag beszúrásával: $\varepsilon_{klm} \delta_{lp} \partial_m \partial_p U = \varepsilon_{klm} \partial_l \partial_m U = 0$. Így kapjuk:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{klm} \partial_p g_m \int_{\text{test}} x_l x_p \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= \\ &= \varepsilon_{klm} (\partial_p \partial_m U) \int_{\text{test}} (r^2 \delta_{lp} - x_l x_p) \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

A kapott integrál éppen a merev test választott origóra vonatkoztatott tehetetlenséginyomaték-tenzora:

$$\Theta(\mathbf{0})_{lp} = \int_{\text{test}} (r^2 \delta_{lp} - x_l x_p) \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (6)$$

A fentieket az (5) egyenletbe visszaírva végül megkapjuk ezen cikk egyik legfontosabb összefüggését, a merev testre külső $U(\mathbf{r})$ potenciálú nehézségi erőterben ható forgatónyomaték általános képletét:

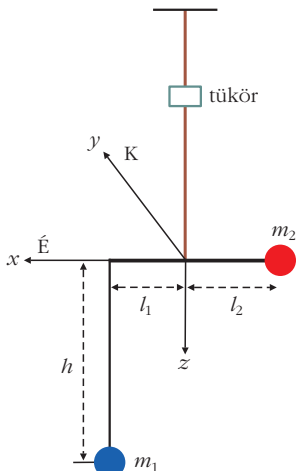
$$M_k = m \varepsilon_{klm} s_l g_m(\mathbf{0}) + \varepsilon_{klm} \Theta(\mathbf{0})_{lp} (\partial_m \partial_p U). \quad (7)$$

Ha – mint az általában szokásos – a koordináta-rendszer origóját a merev test tömegközéppontjába helyezzük, a (7) összeg első tagja eltűnik, hiszen a súlypont \mathbf{s} vektora zérus lesz. Képletünk ekkor az alábbi módon egyszerűsödik:

$$M_k = \varepsilon_{klm} \Theta_{lp} (\partial_m \partial_p U), \quad (8)$$

ahol Θ most már (és a későbbiekben) a test tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenséginyomaték-tenzort jelenti. Ugyancsak a tömegközéppontban kell kiértékelni a nehézségi erőter $U(\mathbf{r})$ potenciáljának második deriváltjaiból álló 3×3 -as $\partial_p \partial_m U$ szimmetrikus mátrixot is, amelyet Eötvös-féle tenzornak neveznek.

2. ábra. A tömegek elrendezése az Eötvös-ingán.



Ebből a képletből lehet kiszámítani – egyebek között – a Földre a Hold és a Nap által kifejtett inhomogén gravitációs erő forgatónyomatékát [13], amely az árapály-jelenségeket, valamint a Föld tengelyének precesszióját okozza. A képlet levezetése Horváth Gábor *Fizikai Szemlében* megjelent cikkében is szerepel [14]. A mai mérési technikák lehetővé teszik, hogy a (4) egyenletben figyelembe vegyük a gravitációs gyorsulás (3a) sorfejtése magasabb rendű tagjainak hatását is. Tetszőleges rendű közelítéshez a gravitációs potenciál gömbfüggvények szerinti sorfejtését alkalmazzák [15].

Az Eötvös-ingára ható forgatónyomaték a nehézségi gyorsulás hely szerinti változása következtében

E részben a mai modern matematikai formalizmus segítségével – a korábbi, az Eötvös-ingával végzett méréseket leíró cikkekben szereplő számításokkal ellentétben – egy igen egyszerű, a (8) képletre alapozott, jól áttekinthető levezetést adunk az Eötvös-ingára ható forgatónyomatékokra. Ez a levezetés tudomásunk szerint nem szerepel az irodalomban.

Eötvös mérésének alap gondolata az, hogy a térben egymáshoz közel elhelyezett tömegekre – a nehézségi erő hat. Megfelelő kísérleti elrendezéssel ez a kis erőkülönbség, illetve az általa létrehozott forgatónyomaték mérhetővé válik.

Eötvös elméleti és kísérletezői zsenialitását mutatja, hogy – ellentétben Cavendish mérésével – ő az inga egyik végén a testet lejjebb helyezte. Ez az egyszerű módosítás, amint az alábbiakban szereplő levezetésből is kitűnik majd, lehetővé tette, hogy a gravitációs potenciálnak, illetve a nehézségi erőnek ne csak vízszintes, de függőleges irányú változásait (hely szerinti deriváltjait) is megmérje.

Az Eötvös-ingában [7] egy függőleges, azaz a nehézségi erőter helyi irányába mutató torziós szálon felfüggesztett, L hosszúságú vízszintes rúd lóg. Ennek egyik végén, egy h hosszúságú függőleges szálon lógva egy m_1 tömegű test, a rúd másik végén egy m_2 tömegű test van rögzítve. A rúd felfüggesztési pontját úgy választják meg, hogy az inga a rúd vízszintes helyzetében egyensúlyban legyen, ez határozza meg a 2. ábrán szereplő l_1 és l_2 hosszúságokat (nyilvánvalóan $L = l_1 + l_2$). Az inga torziós szál körüli elfordulásait a szála erősített tükörről visszaverődő fénysugár segítségével olvasták le.

A számításokhoz – Eötvös cikkeihez hasonlóan – úgy választjuk a koordináta-rendszert, hogy az x tengely a Föld adott pontján az északi, az y tengely keleti irányba, és így a z tengely az inga fonala mentén lefelé, a nehézségi erő irányában mutasson (2. ábra)! Itt a tengelyeket csak azért rögzítjük, hogy a végén kapott forgatónyomaték-formulát összehasonlíthassuk az Eötvös, Pekár és Fekete cikkében [7] szereplő eredménnyel.

Az inga torziós szálára ható forgatónyomaték meghatározásához a (8) képlet harmadik komponensét kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned} M_3 &= \varepsilon_{3lm} \Theta_{lp} (\partial_p \partial_m U) = \\ &= (\Theta_{11} - \Theta_{22}) \partial_1 \partial_2 U + \Theta_{12} (\partial_2 \partial_2 U - \partial_1 \partial_1 U) + \\ &+ \Theta_{13} \partial_2 \partial_3 U - \Theta_{23} \partial_1 \partial_3 U. \end{aligned} \quad (9)$$

Az ingakísérletekben az inga rúdját különböző α szögben állították be az északra mutató x tengelyhez képest. Ezt a szöget azimutuszögnek nevezik. Az elfordított inga tehetetlenséginyomaték-tenzorának komponensei függnek az α azimutuszögtől, jelöljük ezért ezt a tenzort $\Theta'(\alpha)$ -val. A forgatónyomaték (9) összefüggésébe a $\Theta'(\alpha)$ tenzor komponenseit kell behelyettesítenünk. Szerencsére ez a tenzor kifejezhető az alaphelyzetben a 2. ábrának megfelelően észak-déli irányba elhelyezett inga Θ tenzorával, valamint a z tengely körüli α szögű forgatást leíró $\mathbf{R}(\alpha)$ mátrix és annak $\mathbf{R}^T(\alpha)$ transzponáltja segítségével:

$$\Theta'(\alpha) = \mathbf{R}(\alpha) \Theta \mathbf{R}^T(\alpha).$$

Vizsgáljuk meg az alaphelyezetű ingát! Feltehetjük, hogy a rúd keresztirányú (y irányú) kiterjedése sokkal kisebb a hosszirányú méretéhez képest, ekkor a két test és a rúd minden pontjának y koordinátája zérus lesz. Ezért a (6) képlet alapján az inga tehetetlenséginyomaték-tenzorának Θ_{12} és Θ_{23} komponense is zérus lesz, a Θ_{22} komponens pedig megegyezik a két másik diagonális komponens összegével: $\Theta_{22} = \Theta_{11} + \Theta_{33}$. A $\Theta'(\alpha)$ kiszámításához szükséges hármasmátrixszorzás kézzel egyszerűen elvégezhető, de hosszadalmas. Ugyanakkor szimbolikus matematikai programokkal a mátrixszorzás könnyedén végrehajtható. A kapott eredmény, azaz a Θ' mátrix komponensei az alaphelyzetű inga Θ_{11} , Θ_{33} és Θ_{13} mátrixelemei mellett az α szög szögfüggvényeit is tartalmazza.

Ezután a (9) képletbe behelyettesítjük a Θ' tenzor most kiszámított komponenseit. Érdekes módon a számolás során kiesik a Θ_{11} érték, és a végeredmény csak az elforgatatlan inga ($\alpha = 0$) Θ tehetetlenséginyomaték-tenzorának Θ_{33} és Θ_{13} komponenseit tartalmazza:

$$\begin{aligned} M_3 &= -\Theta_{33} \left[(\partial_2 \partial_2 U - \partial_1 \partial_1 U) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \partial_1 \partial_2 U \cos 2\alpha \right] + \\ &+ \Theta_{13} (\partial_2 \partial_3 U \cos \alpha - \partial_1 \partial_3 U \sin \alpha). \end{aligned} \quad (10)$$

Eddig nem volt szükségünk a Θ tehetetlenséginyomaték-tenzor komponenseinek konkrét alakjára, most viszont a 2. ábra és a (6) képlet alapján kiszámíthatjuk a szükséges Θ_{13} és Θ_{33} értékeket:

$$\Theta_{13} = -m_1 l_1 h,$$

valamint homogén rudat feltételezve

$$\Theta_{33} = \Theta_{\text{rúd}} + (m_1 + m_2) \left(\frac{L}{2} \right)^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + M_{\text{rúd}}},$$

ahol $M_{\text{rúd}}$, illetve $\Theta_{\text{rúd}} = M_{\text{rúd}} L^2 / 12$ az inga vízszintes rúdjának tömege, illetve tehetetlenségi nyomatéka a rúd közepén átmenő, a rúdra merőleges tengelyre nézve. Ha a rúd két végén levő testek azonos m tömegűek, akkor a fenti képletek egyszerűsödnek:

$$\Theta_{13} = -m l h$$

és

$$\Theta_{33} = \Theta_{\text{rúd}} + 2m l^2,$$

ahol $l = L/2$. Eötvös az inga z tengely körüli Θ_{33} tehetetlenségi nyomatékát K -val jelölte. A valóságban a Θ_{33} értékéhez a rúdon és a ráhelyezett két tömegen kívül az inga más alkatrészei is hozzájárulnak. Eötvös ezért a K értéket elméleti becslés helyett az inga T_0 saját torziós lengésidejének mérésével határozta meg. Ha a drótszál torziós forgatónyomatékán kívül semmi más forgatónyomaték nem hat, akkor

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{D^*}},$$

ahol D^* a torziós szál direkciós nyomatéka (csavarási nyomatéka).

A fenti eredményünk most már közvetlenül összehasonlítható az Eötvös és társai [7] cikkben közölt nevezetes képlettel, amelyet a gravitációs erőter helyfüggésének kiértékeléséhez használtak:

$$\begin{aligned} -M_3 &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} K \cos 2\alpha + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha \right) m h l. \end{aligned} \quad (11)$$

Az egyenlet bal oldalán a mínusz előjel amiatt lép fel, mert az (1) egyenletben a fizikában szokásos konvenciót használtuk: az erő a potenciál negatív gradiense. Eötvös idejében és egyes tudományágakban, például az égi mechanikában és a felsőgeodéziában ma is a „geopotenciálnak” nevezett $W = -U$ mennyiséget használják. Megjegyezzük, hogy a bemutatott levezetés lépései akkor is alkalmazhatók, ha az ingára vonatkozó fenti közelítések helyett egy általános tehetetlenségi nyomatékú ingából indulunk ki.

Az Eötvös-kísérletekben a gravitációs gyorsulás, illetve az $U(\mathbf{r})$ potenciál hely szerinti változásának méréséhez a (11) egyenletet alkalmazták. A mérés vázlatosan a következő módon történt. A torziós szál és vele együtt a hozzá erősített tükör egyensúlyi helyzete a rá ható forgatónyomaték hatására egy kis φ szöggel elfordul (a meg nem csavart egyensúlyi helyzethez viszonyítva). Ezt a szöget úgy mérték meg, hogy ha a tükör φ szöggel elfordul, akkor a ráeső fénysugár iránya 2φ szöggel térül el a tükörről való visszaverődéskor. Másrészt ez a φ szög a $-M_z = D^* \varphi$

egyensúlyi feltétel alapján határozható meg. A mérés során az ingát α különböző α irányba állították be, és megmérték a torziós szál $\varphi(\alpha)$ elfordulásszögét. Ezután képezve a

$$\varphi(\alpha_{i+1}) - \varphi(\alpha_i)$$

különbségeket ($i = 1, \dots, 4$) a (11) egyenletet felhasználva a $-M_z = D^* \varphi$ egyensúlyi egyenletből négy független lineáris egyenlet adódik a négy ismeretlen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \quad (12)$$

második deriváltra. A (11) egyenletből következik, hogy az inga φ elfordulási szöge úgy növelhető, ha K értékét, azaz a T_0 lengésideőt növeljük. Ezzel viszont időben hosszadalmassá válnak a mérések, mert az ingarúd új helyzetébe történő beállítása után a lengésszám lecsillapodása is tovább tart. Az eredeti mérésekben ez általában egy óráig is eltartott. A mérési eljárás további részleteiről az érdeklő olvasó például [3–7] cikkekben olvashat.

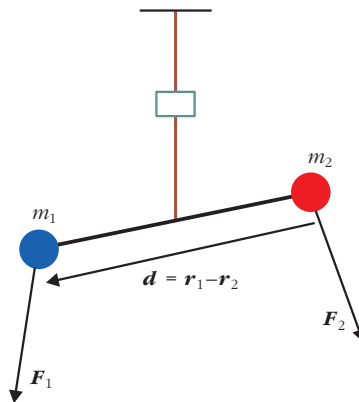
Gömbszimmetrikus erőterben a $-\partial_z U$ radiális térerősség jelentősen változik a z függvényében, gravitációs tér esetén az Eötvös-tenzor $\partial_z \partial_z U$ komponensének nagysága $2g/R$, ahol g a felszíni gravitációs gyorsulás, R pedig a Föld sugara. A Laplace-egyenlet miatt hasonló nagyságrendű a deriváltak $\partial_x \partial_x U + \partial_y \partial_y U$ kombinációja is. Láthatjuk, hogy az Eötvös-ingával végzett mérés érzéketlen az Eötvös-tenzor ezen „nagy” komponenseire, a mérés a (9) képlet szerint éppen az ezeknél nagyságrendekkel kisebb többi komponensre – amelyeket a tömegeloszlás helyi inhomogenitásai okoznak – tudja meghatározni.

A (11) egyenletből az is jól látszik, hogy véges h értékre a forgatónyomaték képletében megjelennek az $U(\mathbf{r})$ potenciál x, z és y, z szerinti második deriváltjai is, ellentétben a Cavendish-kísérlettel, ahol $h = 0$. Azzal, hogy Eötvös az inga egyik végén a testet lejjebb helyezte, a gravitációs térerősség újabb, függőleges irányú deriváltjait lehetett kimérni. E ténynek köszönhető, hogy az Eötvös-inga olyan sikeressé vált a geológiai kutatásokban és az olajmezők felkutatásában.

Itt jegyezzük meg, hogy az eredeti Eötvös-kísérletekben a rúd két végén lévő henger alakú testek nem tekinthetők pontszerűnek. A hengerek hossza mentén a gravitációs erőter kis mértékű változása olyan nagyságrendű járulékot eredményezhet a torziós szátra ható forgatónyomatékban, ami szisztematikus hibaként befolyásolhatja az Eötvös-ingával végzett mérések pontosságát. Ezt a hibát nemrégiben Tóth Gyula tanulmányozta, becsülte meg [16, 17].

Az Eötvös-inga és az ekvivalenciaelv

A súlyos és tehetetlen tömeg azonosságából (amelyet már Newton is felismert) következik az ekvivalenciaelv, amely szerint a gyorsulás és a gravitáció ugyan-



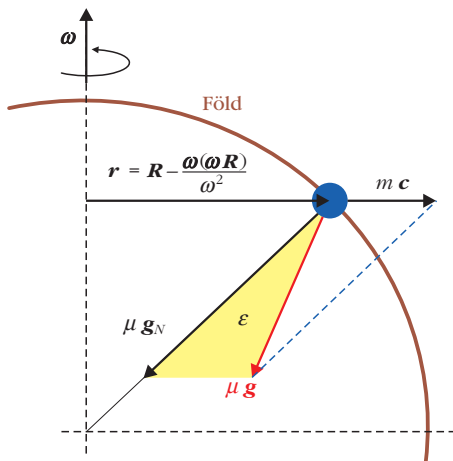
3. ábra. A rúd két végén lévő testekre ható nehézségi erő nem párhuzamos, ha nem teljesül a súlyos és tehetetlen tömeg azonossága.

olyan hatásokat okoz. Ezen az elven alapul a később Einstein által kifejlesztett általános relativitáselmélet. Korábban többen felvetették, hogy a kétféle tömeg nem szükségszerűen azonos egymással, pontosabban szólva: a kétféle tömeg aránya függhet a vizsgált minta anyagi összetételétől. A kérdést csak pontos méréssel lehet eldönteni – amit maga Newton, majd az 1830-as években Bessel el is végzett, de a gravitációs hatások gyengesége és nehezen mérhető volta miatt csak igen kis pontosságot tudtak elérni. Eötvös precíziós ingakísérletei több nagyságrenddel javították a mérési eredmény pontosságát, megmutatva, hogy a tehetetlenségi és gravitációs tömeg aránya minden anyagra azonos. Ezek után a kétféle tömeg azonossága már csak a mértékegység választásán múlik.

A mérés azon alapul, hogy ha nem állna fenn a kétféle tömeg azonossága, akkor a forgó Földön elhelyezett torziós ingára akkor is hatna forgatónyomaték, ha a gravitációs tér hely szerinti változásait nem vennék figyelembe. Ezt a forgatónyomatékot az előzőekben tárgyalt, a nehézségi erőter gradienseire érzékeny Eötvös-inga helyett egy egyszerűbb kísérleti elrendezés, a Cavendish-inga (3. ábra) tanulmányozásával is kiszámíthatjuk. Ezen inga két próbatest a rúd két végén, ugyanabban a vízszintes síkban helyezkedik el. Eötvös mérése során az előző fejezetben tárgyalt és az itt leírt effektus egyszerre jelent meg, a hatások összeadódtak. A mérés kiértékelésekor a kétféle jelenség hatásai elkülöníthetők.

A módszer alapgondolata az, hogy az ingára a Föld forgása miatt kétféle erő hat: a newtoni gravitációs erő, ami a súlyos tömeggel, és a centrifugális erő, ami pedig a tehetetlen tömeggel arányos (4. ábra). Számításainkban nem kell figyelembe venni e két erő hely szerinti változását, csak a kétféle tömeg különböző volta miatt fellépő forgatónyomatékot keressük. A továbbiakban következetesen megkülönböztetjük a testek e fejezetben μ -vel jelölt súlyos és m -mel jelölt tehetetlen tömegét.

Írjuk fel a testre ható gravitációs erőt, figyelembe véve az ideális, homogén tömegeloszlású és gömb alakú Föld tengely körüli forgásának hatását is! Egy testre ható teljes nehézségi erő a Föld által kifejtett gravitáció erő és a centrifugális erő eredője:



4. ábra. A Földön a testre ható newtoni gravitációs erő és a centrifugális erő (erősen torzítva).

$$\mathbf{F} = \mu \mathbf{g}_N + m \mathbf{c} \equiv \mu \mathbf{g},$$

ahol \mathbf{g}_N a newtoni gravitációs gyorsulás, \mathbf{c} pedig a centrifugális gyorsulás, amelyek a következő alakban írhatók:

$$\mathbf{g}_N = -f \frac{M_{\text{Föld}}}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad (13)$$

$$\mathbf{c} = \omega^2 \left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{R})}{\omega^2} \right),$$

ahol $M_{\text{Föld}}$ a Föld tömege, \mathbf{R} a Föld felszínén tetszőlegesen elhelyezett mérési pont helyvektora a Föld középpontjához viszonyítva, $\boldsymbol{\omega}$ a Föld szögsebességvektora, amely a forgástengellyel párhuzamosan északra mutat, f pedig a gravitációs állandó. A centrifugális gyorsulás képletében a zárójelben lévő vektor az \mathbf{R} pont helyvektorának az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektorra merőleges komponense, amelynek hossza éppen a mérési pontnak a Föld forgástengelyétől mért távolsága. A \mathbf{g} eredő nehézségi gyorsulást az \mathbf{F} erő fenti képlete értelmezi.

A Föld adatait figyelembe véve könnyű belátni, hogy a centrifugális gyorsulás sokkal kisebb a gravitációs gyorsulásnál:

$$\frac{|\mathbf{c}|}{g} = \frac{\omega^2 R \cos \vartheta}{g} \approx 0,002,$$

ahol $\vartheta \approx 47^\circ$ Budapest földrajzi szélessége. További képet kapunk arról, hogy a centrifugális erő mennyire kicsi a $|\mathbf{g}| = g$ eredő gravitációs gyorsuláshoz képest, ha kiszámítjuk a Föld középpontja felé mutató \mathbf{g}_N newtoni gravitációs gyorsulás és az eredő \mathbf{g} vektor közti ε szöget (4. ábra):

$$\sin \varepsilon = \frac{|\mathbf{g} \times \mathbf{g}_N|}{|\mathbf{g}| |\mathbf{g}_N|} = \frac{m}{\mu} \frac{|\mathbf{c} \times \mathbf{g}_N|}{|\mathbf{g}| |\mathbf{g}_N|} \approx$$

$$\approx \frac{m}{\mu} \frac{|\mathbf{c} \times \mathbf{g}_N|}{g^2}, \quad (14)$$

ahol a nevezőben kihasználtuk, hogy jó közelítéssel $|\mathbf{g}_N| = g_N \approx |\mathbf{g}| = g$. Mivel a (14) összefüggés számlálója később még többször előfordul, ezért ezt külön is kiszámoljuk:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{g}_N = \omega^2 \left(\mathbf{R} - \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{R})}{\omega^2} \right) \times \mathbf{g}_N =$$

$$= \frac{g_N}{R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) (\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}). \quad (15)$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy a \mathbf{g}_N vektor a (13) képlet szerint a $-\mathbf{R}$ vektor irányába mutat. A (15) képletből látható, hogy az $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, és így a $\mathbf{c} \times \mathbf{g}_N$ vektor is kelet/nyugati irányú (az északi félgömbön keletre, a délin nyugatra mutat). Mivel $|\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}| = \omega R \sin \vartheta$ és $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}| = \omega R \cos \vartheta$, a (14) formula így írható:

$$\sin \varepsilon = \frac{m}{\mu} \frac{\omega^2 R \sin 2\vartheta}{2g}, \quad (16)$$

ahol ismét felhasználtuk, hogy $g_N \approx g$. Ebben az összefüggésben a kétfajta tömeget azonosnak véve, az ismert adatokkal azt kapjuk, hogy Budapesten $\varepsilon \approx 6' = 0,1^\circ$. Ez valóban rendkívül kis szög, a legtöbb esetben nem játszik szerepet. Azonban, mint később látni fogjuk, az ekvivalenciaelv igazolásánál nem hanyagolható el.

Tegyünk fel, hogy az inga rúdjának két végén egy-egy m_1 , illetve m_2 tömegű test van. Ekkor a két testre ható erők: $\mathbf{F}_1 = \mu_1 \mathbf{g}_N + m_1 \mathbf{c} = \mu_1 \mathbf{g}$ és $\mathbf{F}_2 = \mu_2 \mathbf{g}_N + m_2 \mathbf{c} = \mu_2 \mathbf{g}$ (3. ábra). Számítsuk ki először e két erő közti szöget! Egyszerű számolással kapjuk az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 közti δ szögre:

$$\sin \delta = \frac{|\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_1| |\mathbf{F}_2|},$$

ahol

$$\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 = (\mu_2 m_1 - \mu_1 m_2) (\mathbf{c} \times \mathbf{g}_N). \quad (17)$$

Innen – felhasználva a (15) és a (16) egyenleteket – kapjuk:

$$\delta \approx \sin \delta = \left| \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m_2}{\mu_2} \right| \frac{g_N}{R} \frac{|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}| |\boldsymbol{\omega}\mathbf{R}|}{g^2} =$$

$$= \frac{g_N}{g} |\eta| \sin \varepsilon,$$

ahol bevezettük az

$$\eta = \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m_2}{\mu_2} \quad (19)$$

paramétert, amely a keresett mennyiségre, a súlyos és tehetetlen tömeg eltérésére jellemző.

A két erő közti δ szögre kapott (18) kifejezés meg egyezik Eötvös eredményével [7].

A képletből látszik a mérés egyik nagy előnye: a kitérést befolyásoló fenti η paraméter csak a tehetetlenségi és a gravitációs tömeg arányától függ, nagyságuktól viszont nem, emiatt nem növeli a mérés hibáját, ha az inga két próbatestjét nem sikerül pontosan egyforma tömegűre készíteni. Eötvös a próbatesteket különböző anyagokból (vas, szén, fa stb.) készítette el, így a mérés azt is ellenőrizte, hogy a tehetetlen és a súlyos tömeg m/μ aránya függ-e a minta anyagi összetételétől. Látható, ha a kétféle tömeg minden testre azonos egymással, akkor $\delta = 0$, azaz a két testre ható eredő nehézségi erő *párhuzamos* irányú. Ebből következik, hogy ekkor az ingára ható forgatónyomaték zérus.

A továbbiakban meghatározzuk e két erő ingára kifejtett forgatónyomatékát: $\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$. Az ingára az \mathbf{F}_1 és az \mathbf{F}_2 erőkön kívül a torziós szál által kifejtett kötélérő is hat. Egyensúlyi helyzetben e három erő összege zérus, ezért a torziós szál irányába mutató egységvektor:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|}.$$

Így a forgatónyomatéknak a torziós szál irányába mutató komponense, ami elforgatja az inga drótját:

$$\begin{aligned} \tau = \mathbf{n} \mathbf{M} &= \frac{(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \mathbf{M}}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|} = \\ &= \frac{\mathbf{F}_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1)}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|} = \\ &= \frac{\mathbf{r}_2 (\mathbf{F}_2 \times \mathbf{F}_1) + \mathbf{r}_1 (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|} = \frac{\mathbf{d} (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2)}{|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2|}, \end{aligned} \quad (20)$$

ahol $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ az inga rúdjának két végén lévő testeiket összekötő vektor. A negyedik egyenlőségénél kihasználtuk, hogy a vegyszorzat invariáns a vektorok ciklikus cseréjére. Ebből az eredményből is látható, ha az \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 vektorok párhuzamosak, akkor a forgatónyomaték zérus.

A (20) egyenletben szereplő skalárszorzás miatt az eredményben a \mathbf{d} vektornak csak a kelet/nyugati vetülete jelenik meg, ennek értéke pedig $2l \sin \alpha$, ahol $2l$ az inga rúdjának hossza, α pedig a rúd korábban bevezetett azimutuszögét jelenti.

Az $|\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2|$ mennyiség (17), (15) és (16) szerinti értékét sorba behelyettesítve, valamint felhasználva, hogy $|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2| = (m_1 + m_2)g$, a következő eredményt kapjuk:

$$\tau = \mathbf{n} \mathbf{M} = m^* g_N \eta 2 l \sin \alpha \sin \varepsilon,$$

ahol

$$m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ha feltesszük, hogy a kar két végén lévő két test m tömege azonos, akkor $m^* = m/2$, ezért végeredményünk így írható:

$$\tau = m g_N l \sin \varepsilon \sin \alpha \left(\frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m_2}{\mu_2} \right). \quad (21)$$

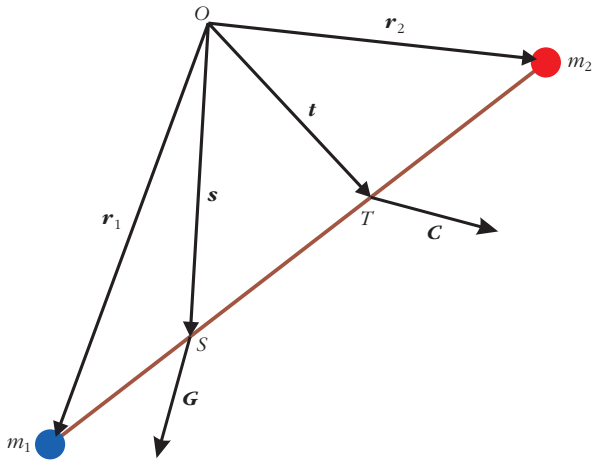
Ez az alak, kiegészítve a nehézségi gyorsulás hely szerinti változásából származó, a (11) egyenletben felírt forgatónyomaték járulékaival, megegyezik Eötvös eredményével [7], amelyet később mások is levezettek [8–10, 18]. Megjegyezzük, hogy ez az eredmény szerepel (más, Eötvös idejében használt jelölésekkel) Tóth Gyula *Fizikai Szemlében* nemrégiben megjelent cikkében is [16]. A fent bemutatott, modern vektoros jelöléseket alkalmazó levezetés és a (16), (18) és (21) képletek az Eötvös-kísélet háttérének több részletére világítanak rá.

Az eredményből jól látható, ha a zárójeles rész, azaz az η paraméter nem zérus – tehát nem teljesül a súlyos és tehetetlen tömeg azonossága –, akkor az ingára forgatónyomaték hat, és elfordul. Az Eötvös-kísérletekben ennek kimutatása volt a cél. A fenti eredményből az is világos, hogy maximális forgatónyomatékokat akkor kapunk, ha az inga rúdját keleti irányba állítjuk, azaz az α azimutuszög éppen 90° . Eötvös, Pekár és Fekete gondosan, a lehetséges hibaforrások minél teljesebb kiküszöbölésével elvégzett méréseik szerint a tömegarányok eltérésére az alábbi, abban az időben kivételesen pontos eredménynek számító felső korlátot kapták [7]:

$$|\eta| \equiv \left| \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{m_2}{\mu_2} \right| \leq 5 \cdot 10^{-9}. \quad (22)$$

Végeredményünk, azaz a (21) összefüggés más megfontolással is levezethető, amely talán más irányból is rávilágít a fellépő forgatónyomaték fizikai okára. Emlékezzünk vissza a merev testre külső erőterében ható forgatónyomaték (7) képletére! Ennek első tagja azt írja le, hogy ha a külső erő támadáspontja nem esik egybe a koordináta-rendszer kezdőpontjával, akkor az origóra vonatkoztatva forgatónyomaték lép fel, függetlenül az erőternek a képlet második tagjában figyelembe vett inhomogenitásától. Márpedig pontosan ez lenne a helyzet, ha a súlyos és a tehetetlen tömeg eltérne egymástól: a kétféle tömeg alapján kiszámolható tömegközéppont (azaz az inerciaerők, köztük a centrifugális erő támadáspontja) nem esne egybe a súlyponttal (azaz a gravitációs erő támadáspontjával). Ekkor a tömegközéppontba helyezett koordináta-rendszerben a súlyerőnek forgatónyomatéka lépne fel (5. ábra). A következőkben megmutatjuk, hogy ez a feltételezett hatás azonos a (21) által leírt forgatónyomatékkal.

Tudjuk, hogy a homogén gravitációs erőter által egy testre kifejtett eredő erő úgy tekinthető, mintha egyetlen pontban, a test S súlypontjában hatna. A súlypont helyvektorának ismert képlete alapján írjuk fel a 3. és az 5. ábrán szereplő Cavendish-inga súly-



5. ábra. A Cavendish-inga S súlypontjában ható \mathbf{G} gravitációs és T tömegközéppontjában ható \mathbf{C} centrifugális erő.

pontjába mutató \mathbf{s} vektort! A helyvektorok súlyozására ebben az esetben a μ súlyos tömegeket kell használnunk. Hasonlóképpen az inerciaerők, köztük a centrifugális erő hatása a T tömegközéppontba egyeshető, ennek \mathbf{t} helyvektora az m tehetetlen tömegek segítségével számítható ki:

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad (23)$$

$$\mathbf{t} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

A két pontot összekötő $\mathbf{k} = \mathbf{s} - \mathbf{t}$ vektor könnyen kiszámítható, rendezés után a következőt kapjuk:

$$\mathbf{k} = \mathbf{s} - \mathbf{t} = \frac{\mu_1 m_2 - \mu_2 m_1}{(\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (24)$$

A kifejezés a korábban bevezetett η paraméter és a \mathbf{d} vektor segítségével átalakítható:

$$\mathbf{k} = -\eta \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)} \mathbf{d}. \quad (25)$$

A két test rendszerére ható erők közül a \mathbf{C} centrifugális erő támadáspontja a T tömegközéppontban van, ezért ennek nincs T -re vonatkozó forgatónyomatéka. A $\mathbf{G} = (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{g}_N$ gravitációs erő támadáspontja azonban az S súlypontban van, ennek T -re vonatkozó erőkarja épp a \mathbf{k} vektor, így a gravitációs erő T -re vonatkozó forgatónyomatéka $\mathbf{M} = \mathbf{k} \times \mathbf{G}$. Ha a forgatónyomaték torziós szála ható τ komponensét akarjuk kiszámítani, akkor a (20)-hoz hasonlóan \mathbf{M} -et meg kell szoroznunk a szál irányába mutató, ezért \mathbf{g} -vel párhuzamos \mathbf{n} egységvektorral:

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{n} \mathbf{M} = \mathbf{n} (\mathbf{k} \times \mathbf{G}) = \mathbf{n} \left[\mathbf{k} \times (\mu_1 + \mu_2) \mathbf{g}_N \right] = \\ &= -\eta \frac{\mu_1 \mu_2}{m_1 + m_2} \mathbf{n} (\mathbf{d} \times \mathbf{g}_N) = \eta \frac{m}{2} \mathbf{d} (\mathbf{n} \times \mathbf{g}_N). \end{aligned} \quad (26)$$

Az utolsó lépésnél – a korábbi számoláshoz hasonlóan – kihasználtuk, hogy egyforma tömegek esetén a tört értéke jó közelítéssel $m/2$. A vegyes szorzatban fellépő $\mathbf{n} \times \mathbf{g}_N$ vektor kelet/nyugati irányba mutat, értéke pedig $g_N \sin \epsilon$, hiszen a \mathbf{g}_N vektor a korábbiak szerint ϵ szöveget zár be a torziós szál irányába mutató \mathbf{g} vektorral. A skaláris szorzás miatt az eredményben ismét a \mathbf{d} vektor kelet/nyugati irányra eső $2/\sin \alpha$ vetülete lép fel. Mindezeket összefoglalva az inga torziós szálára ható forgatónyomaték értéke:

$$\tau = \eta m g_N l \sin \epsilon \sin \alpha$$

lesz, ami megegyezik a korábban más módszerrel levezetett (21) eredménnyel.

Kimondhatjuk tehát, ha a súlyos és tehetetlen tömeg nem lenne azonos, vagy arányuk a minta anyagi összetételétől függne, akkor az Eötvös-ingára a (21) által leírt forgatónyomaték hatna. E jelenség két ekvivalens fizikai magyarázatát is bemutattuk. Ha az inga két testére ható gravitációs és centrifugális erőket testenként adjuk össze, akkor az eredő \mathbf{F}_1 és \mathbf{F}_2 erők nem lennének párhuzamosak, ezért lépne fel forgatónyomaték. Ha viszont előbb egyesítjük a két testre ható centrifugális erőt a T tömegközéppontban ható \mathbf{C} erővé, a két testre ható gravitációs erőt pedig az S súlypontban ható \mathbf{G} erővé, akkor a két támadáspont különböző volta miatt lép fel a \mathbf{G} erő T pontra vonatkozó forgatónyomatéka. A kétféle tárgyalásmód természetesen azonos eredményre vezet. A megjósolt effektust Eötvös és követői igen kis hibahatárral zérusnak találták, ezzel alátámasztva az általános relativitáselmélet alapjául is szolgáló állítást, a súlyos és tehetetlen tömeg pontos azonosságát, illetve arányuknak a testek anyagától való függetlenségét.

Összefoglalás

Az Eötvös-inga két alapvetően fontos kutatási területen vált világhírűvé. Egyrészt a gravitációs gyorsulás hely szerinti változásának nagy pontosságú mérésével lehetőség nyílt lokális geológiai objektumok, például föld alatti olajmezők felderítésére, és így a 20. század első felében az inga gyakorlati alkalmazása gazdasági szempontból is felbecsülhetetlen értékűvé vált. Ezen kísérletek fizikai alapját, nevezetesen az ingára ható forgatónyomatékokat a *Merev testre külső erőterében ható forgatónyomaték általános képlete* fejezetben levezetett általános képlet alapján *Az Eötvös-ingára ható forgatónyomaték a nehézségi gyorsulás hely szerinti változása következtében* fejezetben ismertettük. Másrészt Eötvös és társai a korábbi mérésekhez képest több nagyságrenddel pontosabban mutatták ki a súlyos és tehetetlen tömeg azonosságát, amiből az általános relativitáselmélet alapköve, az ekvivalenciaelv következik. A méréssel kapcsolatos fizikai alapokat *Az Eötvös-inga és az ekvivalenciaelv* fejezetben ismertettük.

Érdemes megjegyezni, hogy az Eötvös-féle mérések pontosságát *Dicke* és munkatársai 1964-ben to-

vább javították, az eredeti Eötvös-kísérletek gondos elemzésével, a pontosságot befolyásoló hibaforrások kiküszöbölésével vagy csökkentésével [19]. Megmutatták, ami első hangzásra meglepőnek tűnik, hogy például egy 100 kg tömegű embernek legalább 30 m távolságban kell lennie az ingától, hogy az általa kifejlesztett forgatónyomaték hatása kisebb legyen a tömegarányok $\eta = 10^{-11}$ eltérésénél. Ezért az inga méretét csökkentették (az inga karja 3,3 cm), és a szögelfordulás leolvasását távolról végezték. Az Eötvös-kísérletek fontosságát jelzi, hogy még napjainkban is folynak ezirányú mérések. A téma iránt érdeklődőknek Nieto és munkatársai cikkét [18], Adelberger és munkatársai összefoglalóját [20], valamint Will könyvét és áttekintő cikkét [21] ajánljuk. A hazai kutatásban Péter Gábor és munkatársai tervezik az Eötvös-kísérlet megismétlését, amelyről bővebben a *Fizikai Szemle* nemrégiben megjelent számában olvashatunk [22].

Irodalom

1. Eötvös Loránd-émlékév 2019. <https://www.eotvos100.hu>
2. Király Péter (szerk.): Eötvös Loránd munkái és méltatása, dolgozatok és dokumentumok gyűjteménye. <http://tudtor.kfki.hu/eotvos1/eotvos.html>
3. Eötvös Loránd: A nehézség és a mágneses erő nivőfelületeinek és változásainak meghatározásáról. Az 1900-dik évi párisi fizikai kongresszus elé terjesztett jelentés. *Math. és Phys. Lapok. IX.* (1900) 361–385.; http://real-j.mtak.hu/7286/1/MTA_MatematikaiEsPhysikaiLapok_09.pdf#page=369
4. H. Shaw, E. Lancaster-Jones: The Eötvös Torsion Balance. *Proc. Phys. Soc. London* 35 (1922) 151–166.; <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1478-7814/35/1/319/meta>
5. A. H. Miller: The Theory and Operation of the Eötvös Torsion Balance with Plates I, II, III. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada* 28 (1934) 1–31.; http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib_query?1934JRASC..28....1M&db_key=AST
6. Bela G. Kolossvary: Eötvös Balance. *Am. J. Phys.* 27 (1959) 336–343.; <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1934847>
7. Eötvös R., Pekár D., Fekete E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik (Leipzig)* 68 (1922) 11–66.; angol fordítás: R. v. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete: Contribution to the law of proportionality of inertia and gravitation. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio geologica* 7 (1963) 111–165.; https://matarka.hu/cikk_list.php?fusz=137841
8. Renner János: Kísérleti vizsgálatok a tömegvonzás és tehetetlenség arányosságáról. *Matematikai és Természettudományi Értesítő* 13 (1935) 542–570.; http://real-j.mtak.hu/4471/1/MatematikaiTermTudErtesito_53.pdf
9. Renner János: Az Eötvös-kísérlet *Fizikai Szemle* 14/1 (1964) 6–10.; <http://fizikaiszemle.hu/archivum/fsz6401/tart6401.html>
10. G. Boniolo: Theory and Experiment. The Case of Eötvös' Experiments. *The British Journal for the Philosophy of Science* 43 (1992) 459–486.; https://www.jstor.org/stable/687836?origin=JSTOR-pdf&seq=1#page_scan_tab_contents
11. Völgyesi Lajos: *Fizikai geodézia és gravimetria*. online tankönyv; https://edu.epito.bme.hu/local/coursepublicity/public_courses.php?publicityid=1993
12. Szabó Zoltán: Az Eötvös-inga históriája. *Magyar Geofizika* 40/1 (1999) 26–38.; http://real-j.mtak.hu/12503/1/EPA03436_magyar_geofizika_1999_1.pdf
13. Dávid Gyula: Az örök nyár bolygója. Az 1982. évi Ortvay Rudolf Fizikai Problémamegoldó verseny 17. számú feladata; a megoldás megjelent: *Válogatás az 1983. évi Ortvay Rudolf Problémamegoldó verseny feladataiból*. kézirat, ELTE TTK Fizikus Diákkör, 1984. (szerkesztette Pótl János); <https://ortvay.elte.hu/mo/1983>
14. Horváth Gábor: A holdak között keringése, az árapály-effektus és az árapályfűtés. *Fizikai Szemle* 41/3 (1991) 79–88.; <http://fizikaiszemle.hu/old/archivum/fsz9103/tart9103.html>
15. E. G. Adelberger, C. W. Stubbs, B. R. Heckel, Y. Su, H. E. Swanson, G. Smith, J. H. Gundlach, W. F. Rogers: Testing the equivalence principle in the field of the Earth: Particle physics at masses below 1 μeV ? *Phys. Rev. D* 42 (1990) 3267.; <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.42.3267>
16. Tóth Gyula: Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciamérések szabályos hibája. *Fizikai Szemle* 69/5 (2019) 155–158.; http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/05/fizszem-201905-tothgyula_15_19_40_1558012780.1868.pdf
17. Gyula Tóth: Explanation of the EPF experiment in terms of gravity gradients. arxiv.org (2019); <https://arxiv.org/abs/1803.04720>
18. M. M. Nieto, R. J. Hughes, T. Goldman: Actually, Eötvös did publish his results in 1910, it's just that no one knows about it.... *Am. J. Phys.* 57 (1989) 397–404.; <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.16038>
19. P. G. Roll, R. Krotkov, R. H. Dicke: The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass. *Annals of Physics* 26 (1964) 442–517.; http://physics.princeton.edu/romalis/papers/Roll_1964.pdf
20. E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, S. Hoedl, S. Schlamminger: Torsion balance experiments: A low-energy frontier of particle physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics* 62 (2009) 102–134.; <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2008.08.002>
21. Clifford M. Will: *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press 2018.; <https://doi.org/10.1017/97813163388612> – A szerző hasonló témájú, szabadon letölthető cikke: The Confrontation between General Relativity and Experiment. <https://link.springer.com/article/10.12942/lrr-2006-3#aboutcontent>
22. Péter Gábor, Deák László, Gróf Gyula, Kiss Bálint, Szondy György, Tóth Gyula, Ván Péter, Völgyesi Lajos: Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciaelv-mérések megismétlése. *Fizikai Szemle* 69/4 (2019) 111–116.; http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/04/fizszem-201904-peter-es-tarsai_13_48_05_1556624885.0311.pdf

