

VEKTOROK PÁRHUZAMOS ELTOLÁSÁNAK SZEMLÉLTETÉSE – I. RÉSZ

A délirányt jelző kordé, a Foucault-inga és egyebek

Bokor Nándor, BME Fizika Tanszék

Laczik Bálint, BME Gyártástudomány és -technológia Tanszék

Vektorok párhuzamos eltolása

Mikor párhuzamos két vektor? A válasz magától értetődőnek tűnik: ha ugyanabba az irányba mutatnak. Menjünk tovább: szeretnénk egy vektort a sík adott pontjából egy másikba párhuzamosan *elmozgatni*. Körülményesebbnek tűnő megfogalmazással: szeretnénk apró lépésenként úgy odébb vinni, hogy mindegyik lépés végén kapott vektor párhuzamos legyen a lépés kiinduló vektorával. Így joggal várhatjuk, hogy a teljes művelet végén kapott vektor is párhuzamos lesz a kezdeti vektorral. A mozgatósi szabály ismét magától értetődőnek tűnik (legalábbis sík felületen): úgy kell a vektort elmozgatni, hogy közben mindig az eredeti irányba mutasson (*1. ábra*).

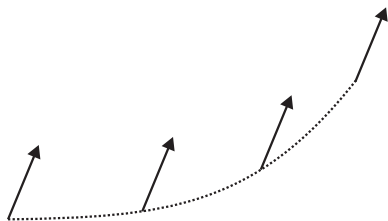
De mi a helyzet görbült felületen? Hogyan magyarázzuk el például egy gömb felületén élő „laposlányeknek” (akik számára nem létezik a harmadik dimenzió, nem látnak ki a felületből), hogy mi a teendő, ha a saját világukban egy vektort párhuzamosan akarnak eltolni? A precíz matematikai szabályt előbb saját magunknak kell kiokoskodnunk, hogy aztán tudathassuk kétdimenziós barátainkkal. Világos, hogy az „úgy eltolni, hogy végig a [3-dimenziós értelemben] eredeti irányba mutasson” szabály itt nem működik,

hiszen akkor a vektorok előbb-utóbb kifordulnának a felületből. Márpedig a laposlányek vektorai mind a felület érintősíkjaiban állnak; különben olyan irányú komponensük is lenne, amely dimenzió nem is létezik (a laposlányek számára).

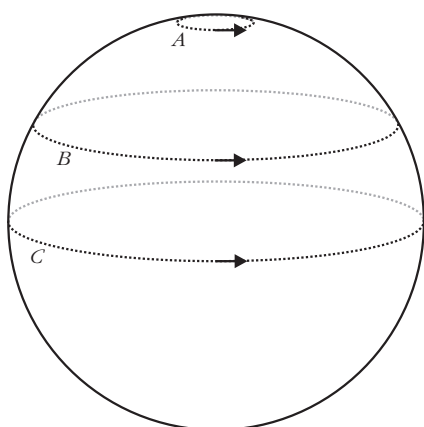
Nézzünk először néhány könnyen tárgyalható konkrét esetet a gömbfelületen, aztán próbáljuk meg megfogalmazni az általános szabályt. A *2. ábra* egy gömbfelületet, a laposlányek univerzumát ábrázolja. Lapos barátaink szeretnének az *A*, *B* és *C* jelű görbéken párhuzamos eltolással körbevenni egy-egy olyan vektort, amelyek a kiinduláskor az adott görbével érintő irányúak. Ezt az első gondolat kísérletünket célszerű úgy megválasztanunk, hogy mindhárom görbe szabályos kör legyen. A nyilvánvaló analógia miatt szemléletes úgy gondolni ezekre, mint Földünk különböző szélességi köreire: az *A* jelű közel van az Északi Sarkhoz, a *B* jelű valahol az északi félteke közepe táján helyezkedik el, a *C* jelű pedig maga az Egyenlítő. Próbáljuk berajzolni az ábrába, hogyan néznek ki a három esetben az apró lépésenként párhuzamosan eltoló vektorok!

Az *A* görbe esetén a legegyszerűbb a dolgunk. A bejárt tartomány a teljes gömbnek nagyon kicsi része, amelyről tudjuk, hogy gyakorlatilag síknak tekinthető. Ahogy egy stadionban körbefutó atléta mozgásának elemzéséhez sem kell a Föld görbületét figyelembe vennünk, úgy itt is minden további nélkül alkalmazható a síkbeli szabály: ábránkat úgy kell megrajzolni, hogy az összes eltoló vektor „nézzen ugyanabba az irányba” (*3. ábra*). A vektor tehát előbb kifordul az *A* görbéből, aztán a teljes kör megtétele után visszajut eredeti állapotába. Az eredeti vektor és a teljes kör megtétele után visszajutott vektor 0 fokban zár be egymással, ahogy síkbeli rajzaink tapasztalatai után várjuk.

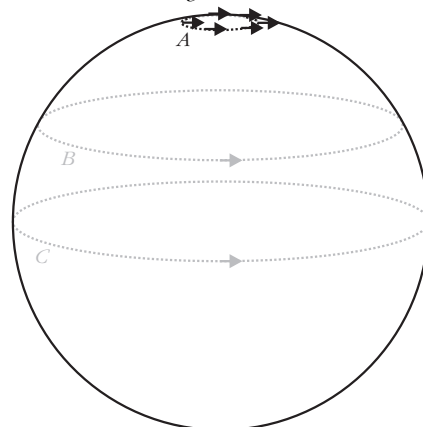
1. ábra

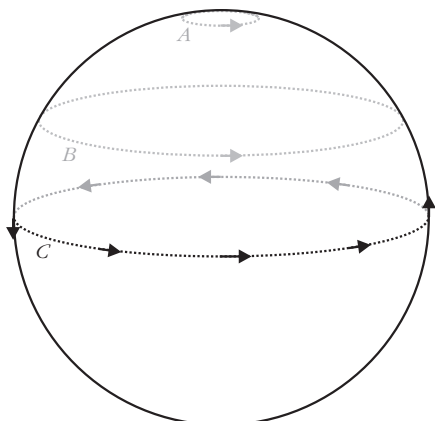


2. ábra

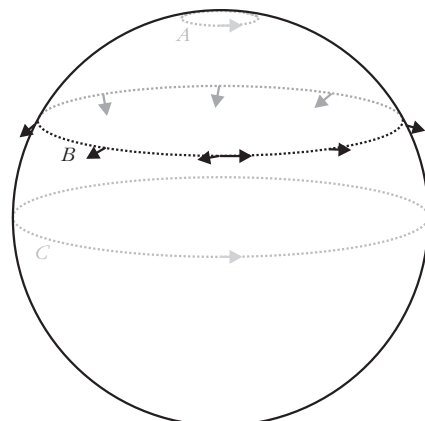


3. ábra





4. ábra



5. ábra

A C görbe esete is egyszerű. Először is, az ábrára a „párhuzamosan eltol” vektorokat úgy kell berajzolnunk, hogy végig a felület érintősíkjaiban maradjanak (hiszen a laposlények számára csak ilyen vektor értelmezhető). Másodszer, mivel a C görbe a gömb egyenlítője, amely szimmetrikusan osztja két részre a gömböt, érintővektora a „párhuzamos eltolás” folyamán nem fordulhat ki sem lefelé, sem felfelé a görbéből, különben megsértené az ábra szimmetriáját. (Akár a lefelé, akár a felfelé elfordulást választjuk, nem tudnánk választásunkat megindokolni.) A vektor tehát mindvégig a görbe érintővektora marad (4. ábra). Mint az A görbe esetében, a vektor a kiindulópontba visszajutva ekkor is fedésbe kerül eredeti helyzetével, de most közben – kívülről, a 3 dimenziós térből nézve – tett egy teljes kört (ebből a nézőpontból nem igaz tehát, hogy mindvégig „ugyanabba a irányba mutatott”!). Helyesebb ezért, ha úgy fogalmazzuk: az eredeti vektor és a teljes kör megtétele után visszatért vektor 2π szöget zár be egymással.

Az A és a C görbe esete markánsan különbözik egymástól: az A görbe mentén – jó közelítéssel sík felületen – végigvitt vektor a teljes kör megtétele után is ugyanabba az irányba mutat, bár menet közben a görbétől erősen kifordul. A C görbe mentén végigvitt vektor viszont a görbéhez képesti helyzetét őrzi meg, miközben a külső (3 dimenziós) szemlélő számára drasztikusan változtatja az irányát. Szerencsés vélet-

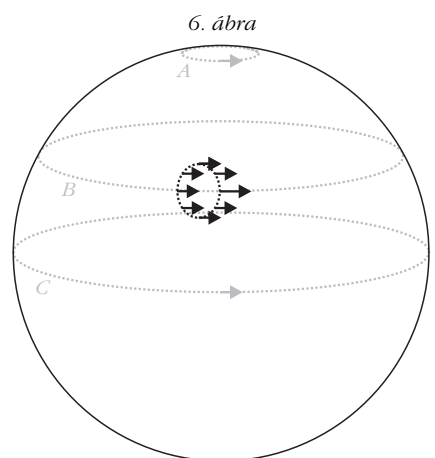
lennek tűnik, hogy a teljes kör megtétele után éppen 2π -nek adódik az összes szögelfordulás.

A B görbe közbülső eset. Eddigi tapasztalataink alapján a következőképpen okoskodhatunk: a vektor a párhuzamos eltolás során biztosan ki fog fordulni a görbétől (hiszen nem alkalmazható rá a C görbénél indokolt szimmetria-érvelés), de *nem olyan mértékben*, mint az A görbe esetén (5. ábra). Bár okoskodásunk hibátlan, a kapott ábra mégis bántóan ellentmond az ösztöneinknek. A berajzolt vektorok egyszerűen „nem tűnnek párhuzamosnak”; ráadásul az a zavarba ejtő furcsaság adódik, hogy a kiindulási vektor és a teljes kör után ugyanoda érkezett eredmény-vektor nyilvánvalóan egészen más irányba mutatnak.

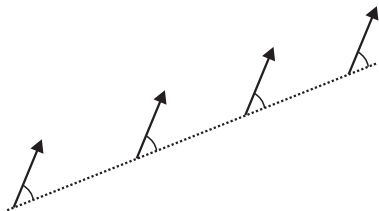
Mielőtt pontosan megértenénk, miért történik ez, gondoljunk végig a következőket: a gömb olyan alakzat, amelynek minden pontja egyenértékű. A B görbén végigvitt vektor furcsa viselkedéséért tehát a bejárt görbe a felelős, nem pedig a kiindulópontnak a gömbön elfoglalt helyzete. Ha ugyanabból a kiindulópontból ugyanazt a vektort egy kis tartományon hordoztuk volna körbe (mondjuk egy az A -hoz hasonló kör mentén), a végeredményül kapott vektor biztosan fedésbe került volna a kiindulási vektorral (6. ábra).

Gondolkodjunk el ezek után, milyen általános szabályt tudunk megfogalmazni, amely a szemléletünknek is megfelel, és az 5–6. ábrák furcsaságait is megnyugtatóan magyarázza. Érezhetjük, hogy naiv szabályunkkal mi volt az egyik baj: a „mindig ugyanarra mutasson” követelmény csak a vektorokról mond egy (ráadásul eléggé pongyolán megfogalmazott) állítást, a görbéről, amely mentén a vektort eltoljuk, tudomást sem vesz. A gömbi példákban viszont láttuk, hogy a vektor helyzetét ahhoz a görbéhez képest kell megadni, amely mentén odébb visszük.

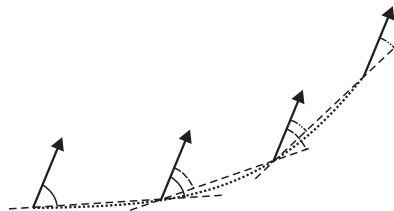
Térjünk vissza oda, ahol a legnagyobb biztonságérzettel mozgunk: egy sík felületre. Először toljuk el vektorunkat párhuzamosan egy *egyenes mentén* (7. ábra). Megfigyelésünk egyszerű: az eltolás során a vektor *a bejárt egyenes vonallal mindvégig azonos szöget zár be*. (Érezzük, miért nagy lépés ez: a felület két vonala közötti szög a laposlények számára is könnyen értelmezhető, ellentétben a kissé megfogha-



6. ábra



7. ábra

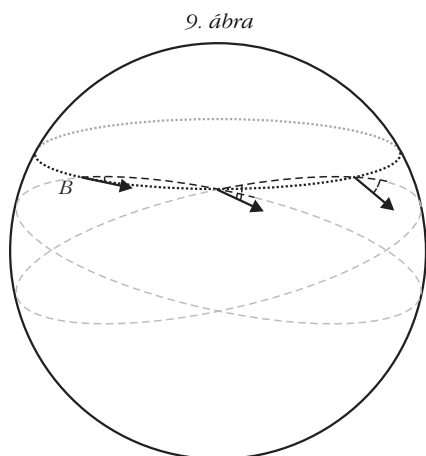


8. ábra

tatlan „ugyanarra mutasson” szabállyal.) Új szabályunk tehát: „Ha egyenes mentén akarod párhuzamosan eltolni a vektorodat, akkor lépésről lépésre gondoskodj arról, hogy a vektor mindvégig azonos szöget zárjon be az egyenessel.” A biztonságot adó sík felületen most görbe vonal mentén vigyük végig a vektort (8. ábra). A görbével bezárt szög nyilvánvalóan változik. Előbb felállított szabályunkat mégis átmenthetjük erre az esetre, az alábbi módon: „Ha görbe mentén akarod párhuzamosan eltolni a vektorodat, akkor a görbét közelítsd kicsiny egyenes szakaszokkal – ezek adják az eltolás lépéseit –, és minden kicsiny egyenes szakaszra követeld meg, hogy a szakasz elején és végén a vektor azonos szöget zárjon be az adott egyenes szakasszal” (8. ábra). Másodikként felállított szabályunk természetesen önmagában is megállja a helyét, hiszen az egyenes mentén történő eltolás speciális esetként kiadódik belőle. De alkalmas-e arra, hogy görbült felület (például gömb) felületén élő laposlényeknek használható receptet adjon a párhuzamos eltolásra? Egyetlen apró átfogalmazásra van csak szükség: az „egyeses” szó görbült felület esetén homályos értelmű, ezért cseréljük ki az általánosításaként használt „geodetikussal” szóval. (A geodetikussal definiációja: a két adott pontot összekötő vonalak közül a legrövidebb.)

Összefoglalva tehát eddigi tapasztalatainkat, bármilyen felületen élő laposlényeknek a következő eltolási szabályt adjuk:

Ha adott vonal mentén párhuzamosan akarod eltolni a vektorodat, akkor a vonalat közelítsd kicsiny geodetikussal szakaszokkal – ezek adják az eltolás lépéseit –, és minden kicsiny geodetikussal szakaszra követeld meg, hogy a szakasz elején és végén a vektor azonos szöget zárjon be az adott geodetikussal szakasszal.



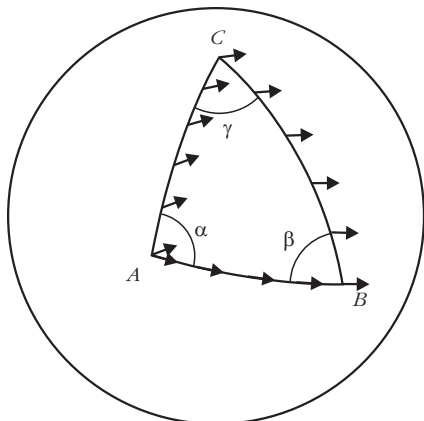
9. ábra

Ellenőrizzük szabályunk használhatóságát a gömbi laposlények esetére! Ismert (és a laposlények is tudják), hogy gömbfelületen két pont közötti legrövidebb út főkör mentén vezet: a főkörök a gömbfelület geodetikussai. A 2. ábra C görbéje pontosan ilyen. Szabályunk azt diktálja, hogy például az ilyen görbe érintővektorának párhuzamos eltolja mindvégig a görbe érintővektora maradjon. És valóban: a 4. ábra megrajzolásakor – más megfontolásból kiindulva – pontosan ezt az eredményt kaptuk. Ami még ennél is meggyőzőbb: szabályunkat a B görbe mentén való eltolásra következetesen alkalmazva valóban az 5. ábrán látható, elsőre furcsának tűnt viselkedést kapjuk. (A repülés történetének jelentékeny eseménye volt, amikor a légitársaságok rádöbbsentek, hogy az azonos szélességi körön fekvő városok – például New York és Isztambul – között *nem* az őket összekötő szélességi kör mentén érdemes repülni, mert *nem* az a legrövidebb út.) Természetes, hogy a vektor kifordul a B szélességi körből, hiszen ez a szélességi kör görbe vonal a gömbön, amit „egyeses” (= geodetikussal) szakaszokkal kell közelítenünk. A szabályunk alkalmazását illusztráló 9. ábra tulajdonképpen a 8. ábra megfelelője gömbfelületre.

A Gauss–Bonnet-tétel

Már tudjuk, hogy a vektor teljes szögelfordulása, miután zárt görbén párhuzamos eltolással visszavittük eredeti helyzetébe, függ a görbe alakjától, az általa bezárt terület nagyságától. De mekkora ez a teljes szögelfordulás? Ezt a kérdést a Gauss–Bonnet-tétel válaszolja meg, amelynek *Eulertől* származó elegáns bizonyításváltozatát [1] az alábbiakban vázoljuk.

Görbült felületre éppúgy rajzolhatunk sokszögeket, mint síkra, csak a sokszög síkbeli definícióját – egyenes szakaszokkal határolt alakzat – kell értelmesen módosítanunk: a sokszög *geodetikussal* szakaszokkal határolt alakzat. Példaként a 10. ábra egy gömbfelületre rajzolt háromszöget mutat. Mindhárom oldal a gömb geodetikussának – azaz egy-egy főkörének – darabja. Vigyünk körbe egy vektort a gömbi háromszögon a párhuzamos eltolás szabályának megfelelően. Mint láttuk, geodetikussal vonal mentén párhuzamosan eltoló vektor megtartja a geodetikushoz képesti irányát (4. ábra). Mivel alakzatunk csupa geodetikussal vonalból áll, a párhuzamos eltolás ábrája könnyen megrajzolható. Az egyszerűség kedvéért az A -ból kiinduló vektor legyen az AB oldal érintővektora. Érintő irányát megtartja egészen addig, amíg a B csúcshoz ér. Ott a BC oldallal $\beta-\pi$ szöget zár be (úgy is mondhatjuk, hogy az AB oldallal be-



10. ábra

zárt 0° -os szöghöz ekkora *szögnövekmény* adódik), és ezt a szöget a BC oldalon való végighaladás során mindvégig megtartja. Amikor a C csúcshoz ér, és elindul a CA oldalon, újabb, ezúttal $(\gamma - \pi)$ nagyságú szögnövekményt kap, azaz a BC oldallal bezárt szöge $(\beta - \pi) + (\gamma - \pi)$ lesz. Végül az A csúcshoz, azaz a kiinduló ponthoz érve az AB oldallal – és saját eredeti irányával – bezárt szöge immár $(\beta - \pi) + (\gamma - \pi) + (\alpha - \pi)$ lesz.

A vektor a teljes hurok megtétele után tehát

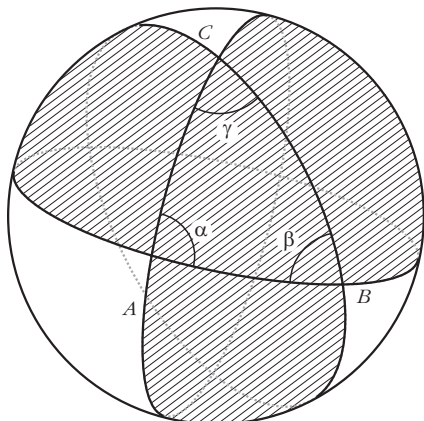
$$\begin{aligned} \delta &= (\beta - \pi) + (\gamma - \pi) + (\alpha - \pi) \\ &= \alpha + \beta + \gamma - \pi \end{aligned} \quad (1)$$

szögelfordulást végez (a szögelfordulást „moduló 2π ” értelmezzük, tehát 2π többszöröse elhagyhatók).

A képlet gyors ellenőrzése: síkháromszög esetén $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tehát δ -ra zérus adódik, amint egy sík felületen párhuzamosan eltol vektortól el is várjuk.

Tegyünk fel egy látszólag nem ide tartozó kérdést: mekkora a 10. ábrán látható gömbi háromszög *területe*? A válaszhoz rajzoljuk le a háromszöget még egyszer, de úgy, hogy az oldalakat adó főköröket végig kirajzoljuk (11. ábra). A három főkör – ezt egy gumilabdán, a főköröket golyóstollal berajzolva könnyen ellenőrizhetjük – a gömbfelületet nyolc részre osztja. Ha ezek közül kiválasztunk négyet: az eredeti ABC gömbháromszöget, valamint az AB , a BC és a CA oldalakkal érintkező további 1-1, összesen három gömbháromszöget – lásd

11. ábra



a vonalkázott részeket a 11. ábrán –, érdekes megfigyelést tehetünk (segít a már említett gumilabda): a bevonalkázott rész a gömb felületének éppen a felét fedi le, sőt egybevágó a be nem vonalkázott maradék résszel. A vonalkázott terület tehát

$$\frac{4 R^2 \pi}{2} = 2 R^2 \pi,$$

ahol R a gömb sugara.

Az ábrán az is látszik, hogy az ABC háromszög voltaképpen három elnyújtott (és bevonalkázott) „kifli-alakzat” metszet-tartománya. Mindhárom kifli-alakzat úgynevezett gömbi kétszög (az elnevezés teljesen logikus; mindazonáltal ennek az egzotikus sokszögnek hiába keresnénk a síkbeli megfelelőjét, ott ugyanis két egyenes nem metszheti egymást kétszer.) A gömbi kétszög egy narancsgerezd héjához hasonlít, ezért területének kiszámítása magától értetődő: területe a gömbfelületnél annyiszor kisebb, ahányszor kisebb a nyílásszöge 2π -nél. A 11. ábrán bevonalkázott, A csúcshoz kétszög területe például:

$$4 R^2 \pi \frac{\alpha}{2\pi} = 2 R^2 \alpha.$$

Az ABC gömbi háromszög T területét ezek után a következő gondolatmenettel kaphatjuk meg: ha a három gömbi kétszög területét összeadjuk, majd az eredményből kétszer kivonjuk a triplán figyelembe vett ABC gömbháromszög területét, megkapjuk a bevonalkázott összterületet:

$$2 R^2 \alpha + 2 R^2 \beta + 2 R^2 \gamma - 2 T = 2 R^2 \pi, \quad (2)$$

amiből a gömbháromszög területe:

$$T = R^2 (\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (3)$$

A (3) és (1) egyenletek egybevetésével azonnal látjuk, hogy párhuzamosan körbevitt vektor teljes δ szögelfordulása a bejárt területtel arányos:

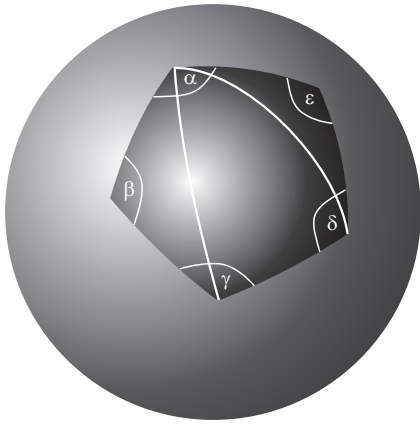
$$\delta = \frac{T}{R^2}. \quad (4)$$

(Innen adódik a δ -ra gyakran használt *felületi excesszus* elnevezés.)

Ahogy egy szöghöz tartozó körív hossz osztva a kör sugarával adja a radiánban mért szög definícióját, úgy a szteradianban mért térszög definíciója: a térszöghöz tartozó *gömbfelület*-darab osztva a gömb sugarának *négyzetével*. A (4) egyenlet jobb oldalán tehát éppen az ABC gömbháromszöghöz tartozó Ω térszög szerepel, azaz a végeredmény ebbe az egyszerű alakba írható:

$$\delta = \Omega. \quad (5)$$

Szavakkal: a gömbi háromszög mentén párhuzamosan eltol vektor teljes felületi excesszusa (radiánban



12. ábra

mérve) egyenlő a háromszög által lefedett (és szteradiánban mért) térszöggel.

A (4) egyenlet könnyen általánosítható: érvényesége igazolható előbb tetszőleges gömbi sokszögre, majd tetszőleges zárt görbére a gömbfelületen. Egy gömbi sokszög ugyanis felbontható gömbi háromszögekre (12. ábra). Könnyen belátható, hogy a teljes felületi excesszus megkapható, mint a háromszögekhez tartozó felületi excesszusok összege. Ugyanakkor – triviális módon – a teljes terület is a háromszögek területének összegeként adódik. A (4) egyenlet tehát változatlan formában igaz. Másrészt a gömbfelületen tetszőleges zárt görbe közelíthető – tetszőleges pontossággal – gömbi sokszöggel, azaz a (4) egyenlet a gömb felületén valóban tetszőleges görbére igaz.

Gaussnak a görbült felületek geometriájában elért egyik legfőbb eredménye az volt, hogy talált egy olyan mérőszámot – ezt tiszteletére Gauss-görbületnek nevezük –, amely egyértelműen és pontról pontra jellemzi az adott felület görbültségének mértékét [2]. A probléma nehézsége abból adódik, hogy a görbület-mérőszámtól elvárjuk: a felület deformációmentes változtatása – mint például egy sík lap felgörgetése hengerré – „ne tudja becsapni”: egy újságlap a lényegét tekintve akkor is sík felület, amikor legyet akarunk vele agyonütni.

A Gauss-görbület kiszámításának módját a következő gondolat kísérlet illusztrálja: az adott pontban húzzuk meg a felület érintősíkját. Állítsunk erre az

érintősíkra merőleges síkokat az összes létező irányban. Ezeknek a merőleges síkoknak és a görbült felületnek a metszsvonalai síkgörbék, amelyeknek az adott pontban meghatározható a görbületi sugaruk. A végtelen sok merőleges síkhoz végtelen sok síkgörbe tartozik, mindegyikhez 1-1 görbületi sugár. Ezeket a görbületi sugarakat előjelesen értelmezzük, attól függően, hogy az adott érintőkör középpontja a felület „alatt” vagy „fölött” helyezkedik-e el. A végtelen sok görbületi sugár érték között lesz egy (előjelesen) legkisebb és egy legnagyobb: R_{\min} és R_{\max} . Gauss zseniális meglátása az volt, hogy a

$$K \equiv \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} \quad (6)$$

mennyiség tökéletesen megfelel a céloknak. Igazi mérőszáma a felület adott pontban értelmezett görbületének, ráadásul előjeles mennyiség. Nem csak síkra, hanem – a sík felületé törzításmintesen kiteríthető – hengerfelületre is zérust ad (utóbbi esetben $R_{\max} = \infty$ miatt) Nyeregfelületre negatív szám, gömbfelületre pozitív. Hangsúlyozandó, hogy K , a Gauss-görbület, pontról pontra értelmezett mennyiség, csak éppen gömbfelület esetén minden pontra ugyanaz: $K = 1/R^2$. Ez utóbbi összefüggéssel a (4) egyenlet a következő alakba írható:

$$\delta = TK. \quad (7)$$

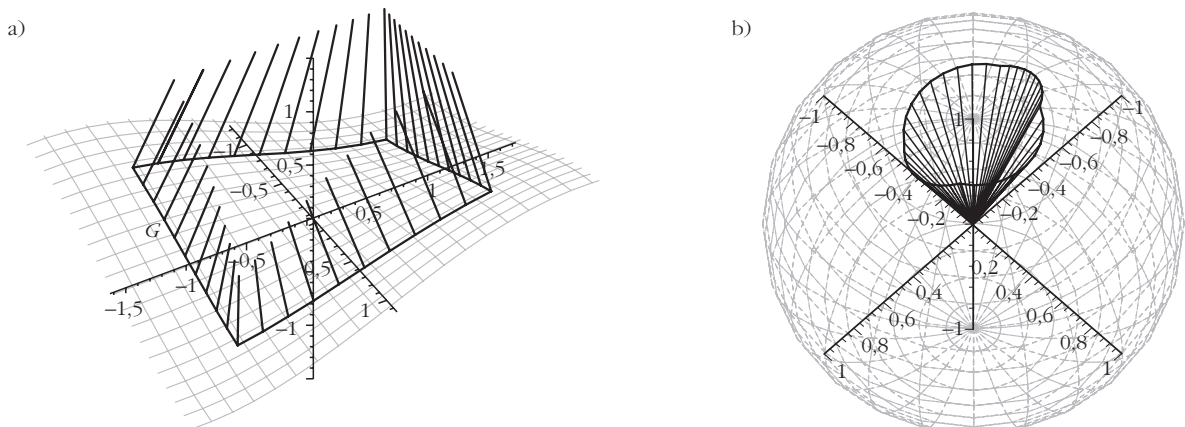
Ez a felírás mód csak állandó görbületű felületekre (a gömbre, és a később tárgyalandó pszeudoszférára) alkalmazható. Tetszőleges görbült felületre így általánosítható: a felületen, adott zárt görbe mentén párhuzamosan eltolt vektor teljes felületi excesszusa egyenlő a Gauss-görbületnek a görbe által körülzárt felületre számított integráljával:

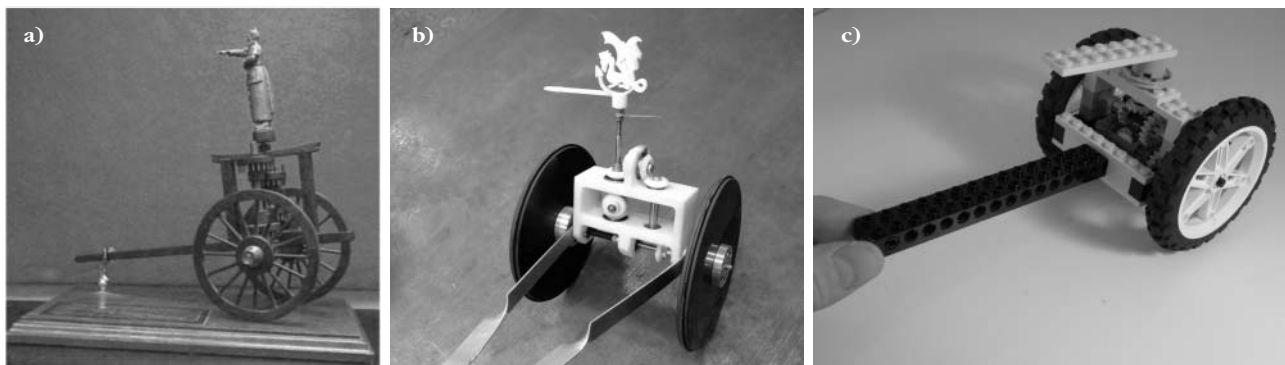
$$\delta = \int_T K dT. \quad (8)$$

Ez a Gauss–Bonnet-tétel.

Érdekesség, hogy a Gauss–Bonnet-tételnek az (5) egyenlet változtatás nélkül, általánosan használható alakját adja. Ilyenkor, tetszőleges (nem gömbi) gör-

13. ábra





14. ábra

bült felület esetén, az (5) jobb oldalán szereplő Ω térszöget a 13. ábra szerint értelmezzük: amint a görbült felület normál egységvektora végigvándorol a G zárt görbén, ugyanezek a normál egységvektorok egy egységgömb középpontjából kiindítva egy másik zárt görbét írnak le az egységgömb felületén. Ennek az egységgömb felületén kialakult zárt alakzatnak a területe adja Ω -t (egyben a G görbéhez tartozó δ felületi excesszust, egyben az eredeti görbült felület Gauss-görbületének a T felületre számított integrálját).

A 13.a ábra az

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2} \sin(u) \sin(v) \end{bmatrix}$$

felületet és az $-0,8 \leq u \leq 0,7$, $-1 \leq v \leq 1,1$ tartomány határán az

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

normál egység vektorokat szemlélteti, a tartomány úgynevezett gömbi képét (azaz az egység sugarú gömb középpontjából indított normál egységvektorok végpontjai által kijelölt alakzatot) pedig a 13.b ábra mutatja.

Szellemes technikai megoldásokkal vagy egyszerű fizikai elvek kihasználásával többféle olyan eszköz konstruálható, amelyek – adott felület adott görbéje mentén elmozogva – ténylegesen megvalósítják vektorok párhuzamos eltolását. (Itt a „vektort” például egy a felület érintősíkjában adott irányban álló rúdnak képzeljük el, amely az eszköz többi részéhez képest elfordulhat, de mindig a felület érintősíkjában marad.¹) Az ilyen eszközökkel kétféle alapkísérlet is végezhető: (1) adott felületen adott zárt görbe mentén végigtolva az eszközt, a „vektor” teljes elfordulásából megkapható a felületi excesszus, és így belső méréssel meghatározha-

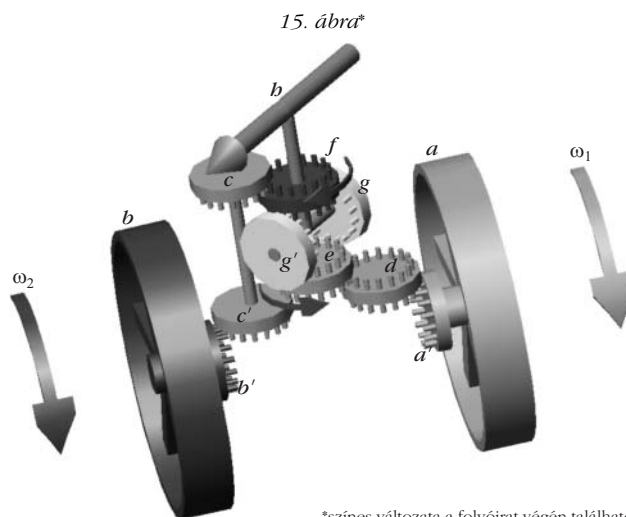
tó az integrált Gauss-görbület; (2) ügyeskedve úgy végigtolva az eszközt a felületen, hogy a „vektor” orientációja (az eszközhöz képest) ne változzon, meg lehet találni a felület geodetikus vonalait.

A kínai délirányt jelző kordé

A délirányt jelző kordé [3–5] nevű ókori kínai találmány – egyes feljegyzések szerint i.e. 2634-ben (!) találta fel a „Sárga császár”, a nagy birodalom akkori uralkodója – a kietlen terepen utazók tájékozódását segítette. Szerkezetének legfontosabb része egy briliáns műszaki lelemény, a fogaskerék differenciál (amely a gépkocsik mindmáig fontos szerkezeti része). A délirányt jelző kordé egy, a British Museum-ban kiállított modellje a 14.a ábrán látható. A működő szerkezet felső részén álló szobor kinyújtott karja a jármű mozgásirányától függetlenül állandó irányba mutatott. (A kordé indulásakor tetszőleges alapirányt lehet választani, a korabeli kínai navigáció szerint azonban a figura a déli világtájat jelezte.)

A 14.b képen egy általunk készített modell látható. Az interneten számos LEGO-változat található, ezek egyikét is összeraktuk (14.c ábra).

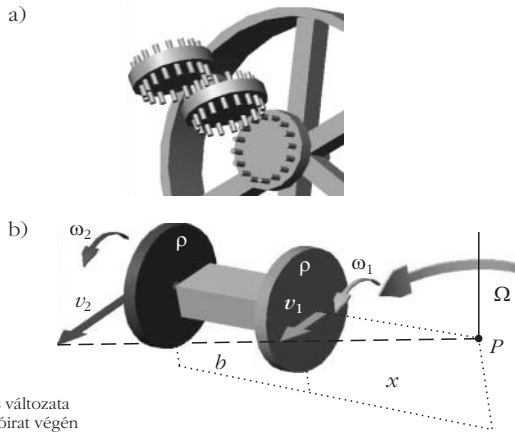
A szerkezet eredeti verziójának egyszerűsített vázlatát a 15. ábra szemlélteti. Az eredeti mechanizmusban a fogaskereknek legrégebbi alakjai, az úgynevezett



15. ábra*

*színes változata a folyóirat végén található

¹ Ez a megjelenítés annyiban félrevezető, hogy egy valóságos vektor „kezdő-” és „végpontja” ugyanabban a pontban van.



*színes változata a folyóirat végén

16. ábra*

homlokcsapos vagy pálcás fogazatok találhatók. Az a és b jelű, azonos átmérőjű kereken gördül a szekér; a bal és jobb oldali kerek szögsebessége ω_2 , illetve ω_1 . A fogaskerekek azonos átmérőjűek, homlokfelületükön megegyező osztású pálcákból épülnek fel. A koronaszerű kialakítás lehetővé teszi mind a párhuzamos, mind a merőleges tengelyrendezésű kerek kapcsolódását (16.a ábra). (Az ábrán a fogaskerekek tengelyeit nem tüntettük fel.)

Azonos alakú fogaskerekek esetén a bal oldali kordékerek a hozzákapcsolt b' , a két részből álló c , valamint az f jelű fogaskerekeket ω_2 szögsebességgel hajtja. Hasonlóképpen a jobb oldali kerék a vele összekapcsolt a' , valamint a mindkét homlokfelületükön fogazott d és e jelű fogaskerekeket ω_1 szögsebességgel forgatja. A felsorolt kerek mindegyike a szerkezethez rögzített tengelyek körül foroghat.

A csúszás nélkül gördülő, azonos ρ sugarú kerek talajjal éppen érintkező pontjai pillanatnyi nyugalomban vannak, a kerek középpontjai pedig $v_1 = \omega_1 \rho$, illetve $v_2 = \omega_2 \rho$ sebességgel mozognak (16.b ábra). Ha például $\omega_1 < \omega_2$, a jármű a P pont körül Ω szögsebességgel elfordul:

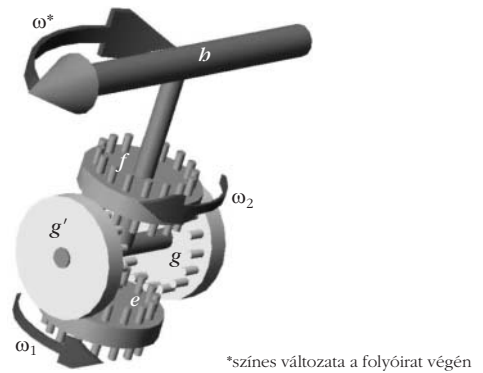
$$\Omega = \frac{v_2 - v_1}{b} = \frac{\rho}{b} (\omega_2 - \omega_1), \quad (9)$$

ahol b a kerek nyomtávolsága.

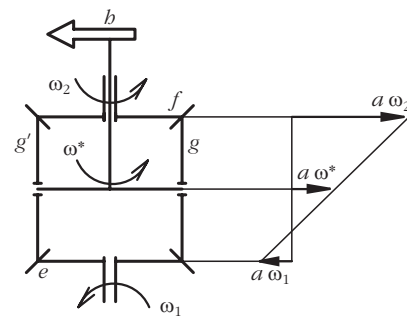
A szerkezet legérdekesebb része az e , f , g és g' jelű fogaskerekekből felépülő differenciálmű (17. ábra).

Az e és f fogaskerekek a kordéhoz rögzített függőleges tengely körül foroghatnak, a g és g' kerekeket hordozó vízszintes tengely azonban az e és f kerek közös tengelyvonala körül képes elfordulni. A g és g' kerekeket hordozó vízszintes tengelyhez kapcsolódik az állandó irányt jelző b kar. Az f kereket a kordé bal oldali kerékrendszere ω_2 szögsebességgel, az e jelű fogaskereket pedig a jobb oldali kerékcsoport ($-\omega_1$) szögsebességgel hajtja. Azonos méretű fogaskerekek esetén a g és g' jelű fogaskerekek középpontjai

$$\omega^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad (10)$$



*színes változata a folyóirat végén



17. ábra*

szögsebességgel keringenek az f és e kerek tengelyei körül. (9) és (10) összevetéséből látható, hogy ba a kordé kerek 2ρ átmérője megegyezik a b nyomtávval, az ω^* szögsebességgel keringő tengelyhez kapcsolt b irányjelző éppen a jármű Ω pillanatnyi kanyarodási szögsebességével ellentétes mértékben fordul el. Ez azt jelenti, hogy – hacsak a kerek nem csúsznak meg – bármilyen pályán is haladjon a jármű, a szobor mindig a jármű pillanatnyi kanyarodásával ellentétesen fordul, a jelző kar tehát mindvégig az indulásnál beállított irányba mutat.

Bár elemzésünket sík felületi mozgást feltételezve végeztük el, bizonyítható, hogy a kordét bármilyen felület bármely zárt görbéje mentén csúszásmentesen gördítve a szobor karja párbuzamos eltolást végez. A kordé használatával tehát elvileg vizsgálható a Gauss–Bonnet-tétel², ennek azonban az a feltétele, hogy a b nyomtávolság sokkal kisebb legyen, mint a vizsgálan-

² A délirányt jelző kordé differenciálgeometriai alkalmazhatóságának eszméje világosan felsejlik Hilbert páratlan geometriai ismeretterjesztő művében. A kordéről szóló első európai beszámoló Herbert Allen Giles (1845–1935) angol diplomata és sinológus 1909-ben közzétett ismertetője. A beszámolót azonban – a szerzők véleménye szerint – Hilbert aligha olvasta.

„A geodetikus vonalakat úgy állíthatjuk elő, hogy valamely végtelen kis görbévet a felületen mindig »egyenest előre« tolunk. Megköveteljük, hogy A és B pályái egyenlő hosszúak legyenek, és hogy e pályák mindegyike AB -re merőleges legyen. Ez a pálya, amelyet ekkor AB középpontja ír le, tetszőleges pontossággal geodetikus, ha az AB görbévet elég kicsinynek választjuk. Ebből a definícióból valószínű, hogy mindegyik pontból mindegyik irányba pontosan egy geodetikus vonal indul ki. E definíció szerint továbbá a geodetikus vonalakat úgy lehet megközelítőleg előállítani, hogy a felületen lehetőleg kis kétkerékű kocsit gördítünk, amelynek kerekai mereven össze vannak kötve a közös tengelyükkel, tehát azonos a fordulatszámuk.”

Forrás: D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: *Szemléletes geometria*. Gondolat Kiadó, 1982, 252 o., Strommer Gyula fordítása.

dó felület bármely görbületi sugara. Másképp megfogalmazva: a kordé karakterisztikus méretskáláján a felület nem lehet túl görbült vagy „göcsörtös”.

Ennek illusztrálására nézzünk egy egyszerű példát, amikor a kordé egy gömb szélességi köre mentén gurul, majd a továbbiakban elemezzük a mozgást az úgynevezett pszeudoszférán.

A kordé mozgása gömbfelületen

A differenciálmű által mozgatott szobor szögelfordulása a szekérvázhoz képest a mozgás T időtartama alatt

$$\Phi = \int_0^T \omega^* dt. \quad (11)$$

A kerekek szögelfordulásai a szekérvázhoz képest hasonlóképpen

$$\Phi_1 = \int_0^T \omega_1 dt, \quad (12)$$

$$\Phi_2 = \int_0^T \omega_2 dt.$$

A kerekek csúszás nélkül legördült ívhosszai

$$S_1 = \rho \Phi_1, \quad (13)$$

$$S_2 = \rho \Phi_2.$$

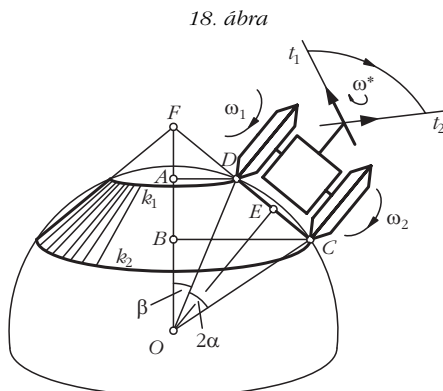
Mivel

$$\Phi = \int_0^T \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} dt, \quad (14)$$

a szobor Φ szögelfordulása, valamint a kerekek által megtett S_1 és S_2 utak kapcsolata:

$$\Phi = \frac{S_1 - S_2}{2\rho}. \quad (15)$$

Gördüljön a kordé ω_1 szögsebességgel forgó kereke az O középpontú, ismeretlen R sugarú gömb k_1 körvonalán, az ω_2 szögsebességgel forgó kerék pedig a k_2 körvonalán (18. ábra).



18. ábra

Legyen $AD = r_1$, $BC = r_2$. A korábbiakkal összhangban $CD = b = 2\rho$ a nyomtáv. A k_2 kör sugara a geometriai viszonyokból (elemi trigonometriai azonosságokat alkalmazva) könnyen megkapható:

$$r_2 = r_1 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2} \left[1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \right] + b \sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{R}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2R}\right)^2} \quad (16)$$

A kerekek által megtett utak az r_1 , illetve r_2 sugarú körök kerületei:

$$\rho \Phi_1 = 2\pi r_1, \quad (17)$$

$$\rho \Phi_2 = 2\pi r_2.$$

A (15)–(17) összefüggések alapján, a Maple R14 formulamanipulációs software alkalmazásával a

$$\frac{\rho \Phi}{\pi} - r_1 + \frac{2\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \sqrt{R^2 - r_1^2} + r_1 R^2 - 2r_1 \rho^2}{R^2} = 0 \quad (18)$$

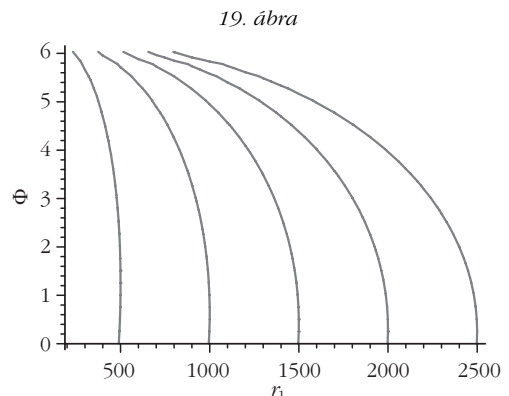
egyenlet adódik. A (18) egyenletet a gömb keresett R sugarára megoldva:

$$R = \pm \frac{2\sqrt{\pi} \sqrt{\pi \rho^2 - \Phi r_1 \rho + r_1^2 \pi}}{\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2}}. \quad (19)$$

A 19. ábra a $\rho = 100$ mm keréksugárhoz az r_1 sugár és a Φ szög függvényében az $R =$ állandó függvényeket szemlélteti.

Legyen a továbbiakban $r = r_1$. A (20) formulából nyilvánvaló, hogy $\Phi \rightarrow 2\pi$ esetén $R \rightarrow \infty$, vagyis a síkon egy teljes kört megtevő kordé irányjelzője pontosan egy teljes körfordulást végez. A kordé kerekeinek ρ sugarát – és egyúttal a $b = 2\rho$ nyomtávot – 0-ra csökkentve a (19) határértéke:

$$\lim_{b \rightarrow 0} R = \frac{2r\pi}{\sqrt{4\pi^2 - \Phi^2}}. \quad (20)$$



19. ábra



20. ábra

A (20) kifejezésből a szobor elfordulása a szekérvázhoz képest ekkor tehát

$$\Phi = \pm \frac{2\pi \sqrt{R^2 - r^2}}{R}. \quad (21)$$

Az R sugarú gömbfelület r sugarú körvonala által határolt göbbsüveg felülete

$$T = 2\pi R \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right). \quad (22)$$

(21) és (22) összevetéséből látszik, hogy a $b \rightarrow 0$ határesetben a kordé szobrának Φ szögű elfordulása valóban kimutatja a Gauss–Bonnet-tétel szerinti δ felületi excesszust:

$$\delta = \frac{T}{R^2} = 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} \right), \quad (23)$$

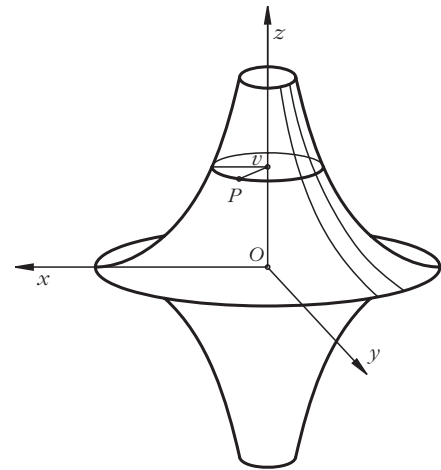
tehát

$$\delta = 2\pi - \Phi. \quad (24)$$

A 14.b ábrán szereplő kordéval az ELTE TTK Lágymányosi Campus központi épületének előcsarnokában álló földgömbön ellenőrző méréseket végeztünk (20. ábra).

A $\rho = 103$ mm kerék sugarú, $b = 206$ mm tengelytávú kordét a jó közelítéssel gömbnek tekinthető glóbuszon körbe gördítve,³ az irányjelző $\Phi = 285^\circ$ szögelfordulása mellett az egyik kereke $n = 7^{1/3}$ körfordulást végzett. A vizsgált kerék ekkor az

³ Az aulában tartózkodók csendes derűtségére a földgömböt – a működtető motor hibája miatt – a déli félteke óceánjain gördülő kordét helyben tartva, kézzel forgattuk körbe.



21. ábra

$$r_1 = \frac{2\rho\pi n}{2\pi} = 755,33 \text{ mm}$$

sugarú körön mozgott. A (19) formulát alkalmazva a gömb sugarára $R \approx 1107$ mm-t kaptunk. (Ellenőrzésül: a földgömb egyenlítői kerülete a modell talpán látható felirat szerint 6660 mm, ez alapján a glóbusz sugarára $R^* \approx 1060$ mm adódik.)

A pseudoszféra⁴

A gömb mellett egy további állandó, $K = -1$ Gauss főgörbületű felület a pseudoszféra. Az $[1,0,0]$ ponton⁵ átmenő traktrix görbe z tengely körül forgatásával előállított pseudoszféra (21. ábra) egyenlete:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} \operatorname{sech}(u) \cos(v) \\ \operatorname{sech}(u) \sin(v) \\ u - \tanh(u) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

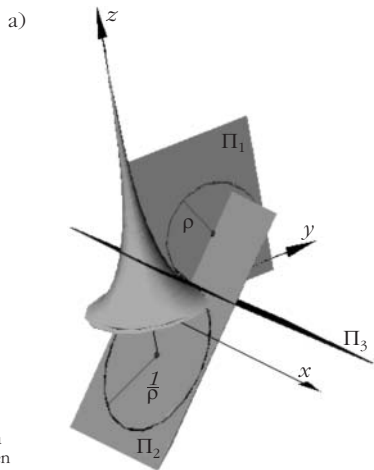
A pseudoszféra első rendű Gauss-féle főmennyiségei a definiáló összefüggésekkel (r_i a (25) vektor i -edik komponense):

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial u} \right)^2 = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)^2}, \\ F &= \frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial r_1}{\partial v} + \frac{\partial r_2}{\partial u} \frac{\partial r_2}{\partial v} + \frac{\partial r_3}{\partial u} \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0, \\ G &= \left(\frac{\partial r_1}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_2}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_3}{\partial v} \right)^2 = \frac{1}{\cosh(u)}. \end{aligned} \quad (26)$$

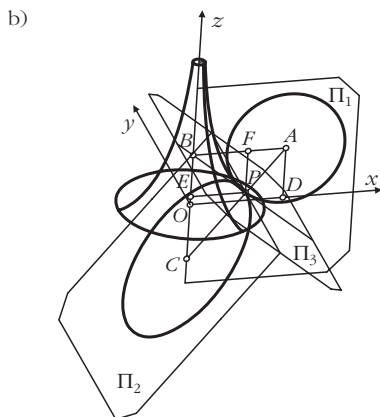
A pseudoszféra felszíne az $a \leq u < \infty$, $0 \leq v \leq 2\pi$ határok között:

⁴ Lásd például Coxeter, H.S.M.: *A geometriák alapjai*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

⁵ A vektor valamennyi komponensét $q > 0$ számmal szorozva, a $[q, 0, 0]$ ponton átmenő traktrix forgatásával adódó pseudoszféra egyenletét nyerjük. Az egyszerűbb tárgyalásmód érdekében azonban az „egység” objektumokat vizsgáljuk.



*színes változata a folyóirat végén



22. ábra*

$$A = \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \frac{2\pi}{\cosh(a)}. \quad (27)$$

A Π_1 jelű x - z koordináta-síkban ($v = 0$) a pszeudoszféra traktrix meridián görbéjének egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sech}(u), \\ z &= u - \tanh(u). \end{aligned} \quad (28)$$

A traktrix görbületi sugara (az u változó szerinti deriválásokat vesszővel jelölve):

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = -\sinh(u) \quad (29)$$

és a görbületi kör A középpontjának koordinátái:

$$\begin{aligned} \xi &= x - x' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = \cosh(u), \\ \eta &= y + y' \frac{x'^2 + y'^2}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}} = u. \end{aligned} \quad (30)$$

Mivel a pszeudoszféra forgásfelület, az $y = 0$ helyzetű P pontjához tartozó Π_3 érintősík merőleges Π_1 -re. A Π_1 és Π_3 síkokra egyaránt merőleges Π_2 , a felület normálmetszeti síkja. Mivel a pszeudoszféra Gauss-görbülete $K = -1$, a Π_2 síkmetszetben a görbületi sugár:

$$\frac{1}{\rho} = \operatorname{cosech}(u). \quad (31)$$

A geometriai viszonyokat a 22. ábrák szemléltetik. A 22.b ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \rho = -\sinh(u), \\ \overline{CP} &= \frac{1}{\rho} = \operatorname{cosech}(u) = -\frac{1}{\sinh(u)}, \\ \overline{AF} &= \cosh(u) - \operatorname{sech}(u) = \cosh(u) - \frac{1}{\cosh(u)}, \\ \overline{AC} &= \overline{AP} + \overline{CP} = -\sinh(u) - \frac{1}{\sinh(u)}, \\ \overline{AB} &= \cosh(u). \end{aligned} \quad (32)$$

Az APF és ACB hasonló derékszögű háromszögek megfelelő oldalainak aránya:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad (33)$$

A hiperbolikus függvények definíciói alapján nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\cosh(u) - \frac{1}{\cosh(u)}}{-\sinh(u)} = \frac{\cosh(u)}{-\sinh(u) - \frac{1}{\sinh(u)}}. \quad (34)$$

Azaz a Π_2 síkmetszet görbületi körének C középpontja éppen a z tengelyre esik.

A P ponthoz tartozó parallel kör sugara (28) szerint, $u = a$ helyettesítéssel

$$r = \overline{EP} = \operatorname{sech}(a) = \frac{1}{\cosh(a)}. \quad (35)$$

A 22.b ábra jelöléseivel a gömbre levezetett (23) összefüggés:

$$\delta := 2\pi \left[1 - \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\sinh(a)}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cosh(a)}\right)^2}}{\frac{1}{\sinh(a)}} \right], \quad (36)$$

egyszerűsítve

$$\delta := 2\pi \frac{\cosh(a) - 1}{\cosh(a)} = 2\pi - \frac{2\pi}{\cosh(a)}. \quad (37)$$

Ezzel a pszeudoszféra példáján is illusztráltuk a Gauss-Bonnet-tétel állítását.

A pszeudoszféra $r = \overline{EP}$ sugarú parallel körén gördített köré mérési eredményei nyilván megegyeznek a $R = \overline{CP}$ sugarú gömb r sugarú parallel körén nyert

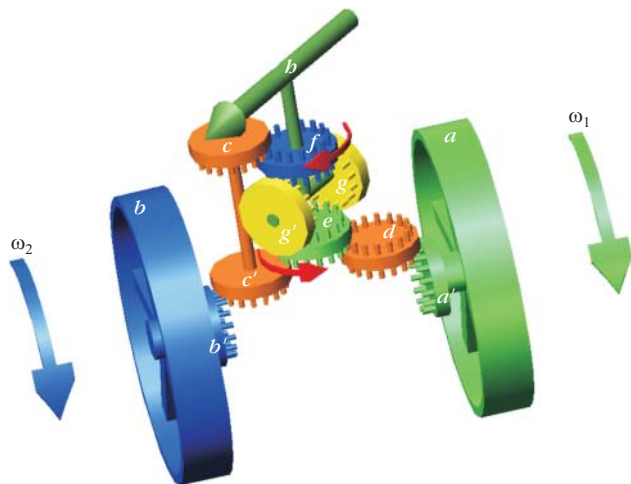
adatokkal.⁶ A gömbfelület és a pszeudoszféra lakói azonban – ha csak *erre az egy* mérésre támaszkodnak – a kordé alkalmazásával nem tudják világaik erősen eltérő alakjait megkülönböztetni.

⁶ Egy olyan kúpfelületen is ugyanezt a mérési eredményt kapnánk, amely érinti a gömböt és a pszeudogömböt a szóban forgó kör mentén. Ez a felület a kúp csúcsának a kivételével mindenütt görbüetlen (sík)! (Lásd erről Hraskó Péter: *Relativitáselmélet*. Typotex, Budapest, 2002, 401. oldalát.)

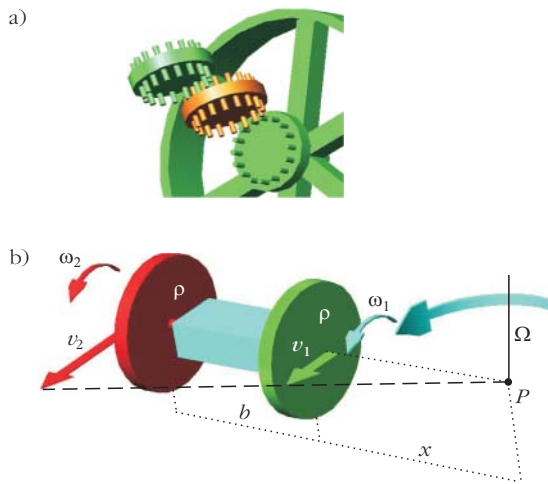
Irodalom

1. J. von Bergmann, H. Ch. von Bergmann: Foucault pendulum through basic geometry. *Am. J. Phys.* 75/10 (2007) 888.
2. Lánczos Kornél: *A geometriai térfogalom fejlődése*. Gondolat Kiadó, Budapest, 1976.
3. Laczik B: A délirányt jelző kordé. *Term. Vill.* (2009) 2.
4. M. Santander: The Chinese south-seeking chariot: a simple mechanical device for visualizing curvature and parallel transport. *Am. J. Phys.* 60/9 (1992) 782.
5. F. Duditza, D. Diaconescu: Ein sinnreiches Zahnradifferential aus dem antiker China. *Maschinenbautechnik* 36/6 (1987) 268.

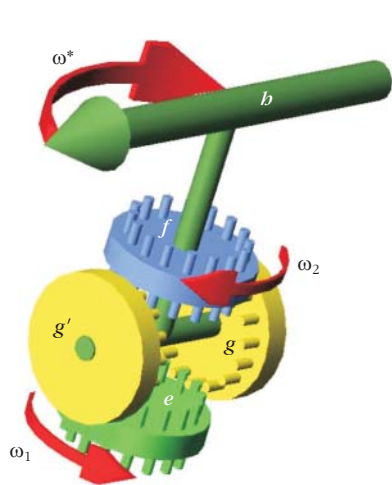
SZÍNESEN INFORMATÍVABB – a délirányt jelző kordé



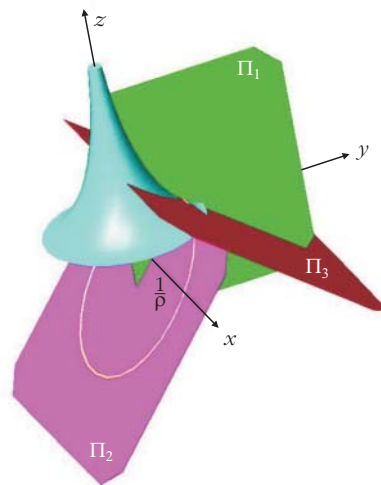
A délirányt jelző kordé mechanizmusa



Pálcás fogaskerek / A síkon mozgó kordé sebességei



Az irányjelző differenciálműve



A pzeudoszféra főgörbületei

ОГЛАВЛЕНИЕ

M. G. Szabo, A. Szilony, T. Salami: Новости из мира эзопланет
P. Szabo, A. Dzsereks: Астросейсмология и наблюдение толкотни звезд
 (Способности оптики космического телескопа им. Кеплера)
A. Керестури: Возможны ли межпланетные путешествия живых существ?
З. Юрек, Д. Файгель, Г. Бортель, М. Тэжзе: Успешно ли применение рентгеновского лазера на свободных электронах для определения структуры единичных молекул
З. Киш, Т. Бельдя, Л. Сентмиклоши, Ж. Кастовский: Нейтронный анализ шедевров искусства – проект им. Ancient Charm Европейского Общества
H. Бокор, Б. Лашик: Наглядный показ параллельного сдвига векторов – часть первая
Д. Раднаи: Столетие первой Сольвей-конференции – часть первая

П. Оля-Галь: Мор Рэти и Туллио Леви-Чивита
T. Szabo, Л. Шиколя, А. Сабо: Тодор Карман, 1881–1963

ОБУЧЕНИЕ ФИЗИКЕ

T. Стонаковский, А. Мурзуй, Р. Пацаи, Л. Церна: Загары (от солнца) возле капель воды на пистах растений: предметы ученических задач по биооптике
Э. Кабаль-Биро: Определение высот зданий методом Галилея
Ж. Фаркаи, Т. Гайдош, Б. Майор, А. Надь: Учёные и времена. На стаже: Архимед, Галилео, Ньютон
И. Бигуш: 300 лет обучению экспериментальной физике в Шарошпатаке
T. Szabo, Л. Шиколя, А. Сабо: Шандор Микола, 1871–1945

КНИГИ, ПРОИСХОДЯЩИЕ СОБЫТИЯ

Fizikai Szemle
 MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését anyagilag támogatják:

