

bi eredmények alapján ezzel együtt is legfeljebb néhány ezred naptömeget kapnánk a por mennyiségére, ami továbbra is jóval kisebb az elméleti tanulmányokban prognosztizált tömegeknél.



Tanulmányunk összességében azt sugallja, hogy a szupernóva-robbanások – bár elméletileg a legmegalozottabb jelöltjei a kozmikus portermelésnek –, a megfigyelések alapján nem a várt mértékben járulnak hozzá az Univerzum portartalmának gyarapításához. Az előttünk álló években mind a szupernóvák vizsgálatában, mind a precíziós infravörös csillagászat területén ugrásszerű fejlődés bekövetkezését várjuk, ami segíthet végleg eldönteni a kérdést: vajon tényleg nem keletkezik sok por a szupernóvák környezetében, vagy csak eddig nem voltunk rá képesek, hogy mindet megtaláljuk.

Irodalom

1. Vinkó J., Kiss L. L., Sárnecky K., Fűrész G., Csák B., Szatmáry K.: Szupernóvák. *Meteor Csillagászati Évkönyv 2001*, 218. <http://astro.u-szeged.hu/ismeret/szuperno/szuperno.html>
2. Vinkó J.: Távolagszmérés szupernóvával: tények és talányok. *Fizikai Szemle 56/7* (2006) 221. <http://www.kfki.hu/fszemle/archivum/fsz0607/vinko0607.html>
3. Szalai T., Vinkó J., Balog Z., Gáspár A., Block, M., Kiss L. L. *A&A* (2010) közlésre beküldve
4. Vinkó J. és mtsai, *MNRAS* 369 (2006) 1780.
5. Vinkó J. és mtsai, *ApJ*, 695 (2009) 619.
6. Kotak, R. és mtsai, *ApJ* 628 (2005) L123.
7. <http://irsa.ipac.caltech.edu/applications/Spitzer/SHA/>
8. Lucy, L. B., Danziger, I. J., Gouffes, C., Bouchet, P., in *Structure and Dynamics of the Interstellar Medium*. (ed. G. Tenorio-Tagle et al.) Springer, Berlin, 1989, 164.
9. Meikle, W. P. S. és mtsai, *ApJ* 665 (2007) 608.
10. Mathis, J. S., Rumpl, W., Nordsieck, K. H., *ApJ* 217 (1977) 425.
11. <http://mocassin.world-traveller.org/>
12. Chugai, N. N., Chevalier, R. A., Utrobin, V. P., *ApJ* 662 (2007) 1136.

HOGYAN IS MOZOG EGY TÖMEGES RUGÓ? – I.

Woynarovich Ferenc
MTA SZFKI

A villanyvasutat gyerekjátéknak találták ki, mégis sokan felnőtt fejjel is szívesen játszanak vele. Valahogy így vagyok én a tömeges rugó problémájával, ami egy tipikus tankönyvpélda lehetne, amennyiben a megoldásához szükséges megfontolások és módszerek részei a standard mechanika- és analíziskurzusoknak, mégis „felnőtt fizikusként” is örömmel foglalkozom a problémával. Először 1976-ban játszottam vele: kidolgoztam magamnak a normál módusokra alapozott megoldást. Ez annyira megtetszett, hogy Ortway-példát is gyártottam hozzá (amire egyébként nem jött teljes megoldás). Ezzel a dolog el is lett volna intézve, ha tán két éve egy KöMaL-példa kapcsán újra elő nem kerül. Többekkel beszélgettünk róla, aminek eredménye – jórészt *Groma István* (ELTE, TTK, Anyagfizikai Tanszék) ötlete alapján – egy újabb, a mozgó hullámfrontokat leíró megoldás lett. Mondanom sem kell, ehhez is született egy Ortway-példa (2009-ben, amire sajnos megint nem érkezett teljes megoldás). A jelen kézirat összeállítása közben tudtam meg, hogy a történet itt nem állt meg, a feladat többnek bizonyult mint egy nívós rejtvény: egyes elemei beépültek a fizikusok kontinuummechanika kurzusának anyagába. Nem tudom, hogy az érintett hallgatók mennyire szeretik, de remélem, meglátják szépségét, mint ahogy azok a kollégák is, akik elolvassák ezt a munkát.

Bevezetés

Az évtizedek óta tartó tananyagcsökkentésnek szerencsére (még) nem esett áldozatul a harmonikus rezgőmozgás oktatása. E mozgás iskolapéldája az egyik

végénél rögzített, elhanyagolható tömegű rugó által mozgatott, véges tömegű test rezgése. Elvárás, hogy a tanulók tudják, ha a test tömege M , a rugóállandó pedig D , akkor a rezgésidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{D}}$$

A jobb diákok azt is tudják, hogy ha a rugónak is van mondjuk m tömege (ami azért jóval kisebb mint M), azt úgy lehet figyelembe venni, hogy a rendszer effektív tömegének $M_{\text{eff}} = M + m/3$ -at veszünk. A magyarázat nagyon szemléletes: feltételezve, hogy a rugó megnyúlása a mozgás során végig egyenletes, a rugó mentén a sebesség lineárisan nő, így ha az M tömeg sebessége v , a rugó kinetikus energiája $mv^2/6$, ami olyan, mintha M helyén $M + m/3$ tömeg mozogna. Ugyanakkor az is nyilvánvaló, hogy megfontolásunk alapfeltevése, azaz a rugó egyenletes megnyúlása csak közelítés lehet: az egyenletesen megnyújtott vagy összenyomott rugó bármely darabjára mindkét irányban ugyanakkora erő hat, így az, mivel véges tömegű, nem gyorsulhatna. Az ellentmondás feloldása természetesen az, hogy a tömeges rugó megnyúlása a mozgás során nem egyenletes, és a rendszer mozgása általában annál összetettebb, mint hogy egy paraméterrel (az M kitérésével) jellemezhető legyen. Valójában a pontos leíráshoz a rugót mint egy egy-dimenziós, végtelen sok szabadsági fokú rugalmas közeget kell kezelnünk. Jelen cikk célja ennek bemutatása. Látni fogjuk, hogy a rendszer saját rezgése (normál módusai) állóhullámok, amelyek közül a legelső tényleg tág határok között jól közelíthető a fenti effektív

tömeges leírással, de ez a közelítés az egész mozgásra csak akkor elfogadható, ha a magasabb módusok csak kis súllyal gerjednek. Ez azonban a kezdeti feltételektől elég erősen függ, ahogy azt két egyszerű példán részletesebben is bemutatjuk. A rendszer hullámegyenlettel történő leírása lehetővé teszi a „tranziensek” vizsgálatát is, nevezetesen annak nyomán követését, hogy egy adott kezdeti feltételből időben hogyan fejlődik a mozgás. A vizsgált példák egyikét ebből a szempontból is elemezzük.

A kétféle leírás, azaz a normál módusok megadása, illetve a mozgás időfejlődésének követése, technikailag nagymértékben különbözik egymástól, ez természetes módon kínálja az anyag – terjedelme által amúgy is indokolt – két részre bontását.

A mozgásegyenletek

Tegyük fel, hogy a D direkciós erejű, m tömegű és l hosszúságú rugó sima, vízszintes talajon fekszik, egyik vége egy falhoz van rögzítve, és a másik végén lévő M tömegű test a rugó tengelye irányában a rugóval együtt súrlódásmentesen mozoghat. Paraméterezzük a rugó egyes pontjait a rögzített végtől mérhető x egyensúlyi távolsággal, és jelöljük az egyes pontok (longitudinális) elmozdulását a t időpillanatban $s(x, t)$ -vel! A rugó egészére jellemző m és D helyett az ezeknek megfelelő lokális mennyiségeket, azaz az egy dimenzióban értelmezett $\rho = m/l$ sűrűséget, és a Young-modulus egydimenziós analogonjának megfelelő $\varepsilon = Dl$ mennyiséget kell használnunk. Ez utóbbi jelentése: ha az x pontban a rugó relatív megnyúlása $\partial s/\partial x$, akkor abban a pontban a rugóban $F(x) = \varepsilon \partial s/\partial x$ erő hat, azaz a rugónak az x -ben található két darabja ekkora erővel húzza egymást (lásd például *Widemann László* cikkét ebben a lapszámban). Ennek segítségével már felírható a rugó x és $x+\Delta x$ közötti szakaszára vonatkozó Newton-egyenlet:

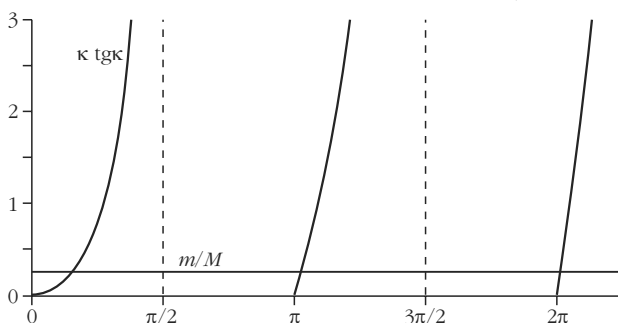
$$F(x+\Delta x) - F(x) = \rho \Delta x \ddot{s}(x, t),$$

ami végülis a

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

hullámegyenletet adja.

1. ábra. A (8) egyenlet grafikus reprezentációja.



Ebben a hangsebesség

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = \sqrt{\frac{Dl^2}{m}}. \quad (2)$$

A peremfeltételek az elrendezésből adódnak: egyrészt az $x = 0$ vég rögzített, azaz

$$s(x=0, t) = 0, \quad (3)$$

másrészt az M tömeg mozgása követi Newton II. törvényét, tehát

$$-\varepsilon \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = M \frac{\partial^2 s(l, t)}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Ez utóbbi az (1) hullámegyenlet miatt ekvivalens a

$$-\frac{\rho}{M} \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} \quad (5)$$

egyenlettel.

A normál módusok

A megoldásokat

$$s(x, t) = \sin(kx) \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

állóhullámalakban keressük. Ez kielégíti az (1) hullámegyenletet, ha

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (7)$$

megfelel a rögzített végre vonatkozó (3) peremfeltételnek, és az M -re vonatkozó (4) Newton-egyenlet is teljesül, ha

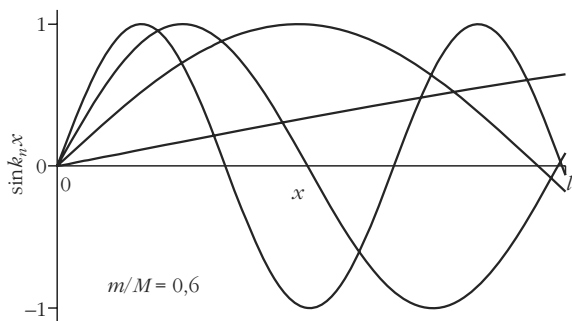
$$\kappa \operatorname{tg} \kappa = \frac{m}{M}, \text{ ahol } \kappa = kl. \quad (8)$$

Ez a két egyenlet – (7) és (8) – határozza meg a saját-frekvenciákat.

Ahogy az az 1. ábrán látható, a megoldások az $M \rightarrow 0$ limeszben megfelelnek az egyik végén szabad rugalmas rúd longitudinális rezgéseinek ($\kappa_n = [n+1/2]\pi$), az $M \rightarrow \infty$ határeset pedig olyan, mintha mindkét vég rögzített lenne ($\kappa_n = n\pi$). Nyilván a közbülső esetek az érdekesek, amikor $0 < \xi_n = \kappa_n - n\pi < \pi/2$. Ezekben a megoldások akár numerikusan,¹ akár m/M szerinti hatványsorok formájában megadhatók.² Különösen jól kezelhető az $m \ll M$ eset, amikor is elég ezen hatványsorok első néhány tagját meghatározni.

¹ A $\xi_n(i+1) = \arctg\left(\frac{m/M}{n\pi + \xi_n(i)}\right)$ rekurzió igen jól konvergál.

² Ha a ξ_n -t m/M szerinti hatványsor alakjában keressük, (8) ξ_n szerinti hatványsora segítségével az együtthatók tagról tagra tetszőleges rendig meghatározhatók.



2. ábra. A rugó (longitudinális) deformációjának alakja az első néhány normál módusban $m/M = 0,6$ esetén.

Ekkor

$$\kappa_0^2 = \frac{m}{M} - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 + \frac{4}{45} \left(\frac{m}{M} \right)^3 \dots, \quad (9)$$

$$\kappa_n = n\pi + \frac{1}{n\pi} \frac{m}{M} - \frac{1}{(n\pi)^3} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \dots \quad (10)$$

$(n = 1, 2, \dots).$

A nulladik módus A_0 „amplitúdóval”:

$$s_0(x, t) = A_0 \sin k_0 x \sin(\omega_0 t + \phi_0). \quad (11)$$

Itt (2), (7) és (9) alapján

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \kappa_0^2 = \frac{D}{M + m/3} \left\{ 1 + O \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \right] \right\} \quad (12)$$

és

$$\sin k_0 x = \frac{x}{l} \sin \kappa_0 \left[1 + O \left(\frac{m}{M} \right) \right], \quad (13)$$

tehát

$$s_0(x, t) \approx \mathcal{A}_0 \frac{x}{l} \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (14)$$

$$\text{ahol } \mathcal{A}_0 = A_0 \sin \kappa_0.$$

Ez valóban olyan, mint egy $M + m/3$ tömeg \mathcal{A}_0 amplitúdójú rezgése egy D direkciós erejű ideális rugón, tehát a *nulladik módus* közelíthető az effektív tömeges leírással (mégpedig annál pontosabban minél kisebb az m/M tömegarány).

A többi ($n \geq 1$) módus alakja

$$s_n(x, t) = A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n), \quad (15)$$

ahol

$$k_n = \frac{n\pi}{l} + \frac{1}{n\pi} \frac{m}{M} + O \left[\left(\frac{m}{M} \right)^2 \right] \quad \text{és} \quad \omega_n = c k_n. \quad (16)$$

Ezek olyan állóhullámok, amelyekben rendre n cso-

mópont van, de a rugó $x = l$ vége sem nem csomópont, sem nem duzzadási hely (2. ábra). Ezért a sin hullám amplitúdója nem azonos az M mozgásának amplitúdójával: ha az előbbi \mathcal{A}_n , az utóbbi $A_n = A_n \sin \kappa_n$. Megjegyzendő, hogy minél kisebb az m/M hányados, ezek a módusok annál jobban hasonlítanak a mindkét végén rögzített rugón lehetséges állóhullámokra.

Bár használni fogom ezt a kifejezést, tisztázni kell, hogy az egyes módusok a szokásos értelemben nem felharmonikusai egyik alacsonyabbnak sem, hiszen a frekvenciák hányadosa (esetleges véletlenekektől eltekintve) irracionális szám. Ebből következően több módus gerjesztése esetén a rugó mozgása csak *közeli-tőleg lehet periodikus*.

A kezdeti feltételek illesztése

A normál módusok teljes rendszert alkotnak, tehát a rendszer minden mozgása leírható ezek szuperpozíciójaként:

$$s(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin(\omega_n t + \phi_n). \quad (17)$$

Az A_n -eket és a ϕ_n -eket úgy kell meghatározni, hogy az

$$\begin{aligned} s(x, t=0) &= s_0(x), \\ \frac{\partial s(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= v_0(x) \end{aligned} \quad (18)$$

kezdeti feltételek teljesüljenek, azaz

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \phi_n \sin k_n x, \quad (19)$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \omega_n \cos \phi_n \sin k_n x. \quad (20)$$

A $\sin k_n x$ függvények az adott k_n -ek mellett az $0 < x \leq l$ szakaszon önmagukban nem, de a tömegekkel súlyozva ortogonálisok. Ez esetünkben azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \rho \int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx + M \sin k_n l \sin k_m l &= \\ &= \delta_{nm} \frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Fontos megjegyezni, hogy ugyanakkor a rugóban lévő feszültségeket leíró deriváltak a tömeggel való súlyozás nélkül ortogonálisok lényegében ugyanazzal a normával:

$$\int_0^l \cos k_n x \cos k_m x dx = \delta_{nm} \frac{l}{2} \left(1 + \frac{M}{m} \sin^2 \kappa_n \right) \quad (22)$$

A (21) ortogonalitást kihasználva (19) és (20) az

$$A_n \sin \phi_n = \frac{\rho \int_0^l s_0(x) \sin k_n x dx + M s_0(l) \sin \kappa_n}{\frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n)} \quad (23)$$

és

$$A_n \omega_n \cos \phi_n = \frac{\rho \int_0^l v_0(x) \sin k_n x dx + M v_0(l) \sin \kappa_n}{\frac{1}{2} (m + M \sin^2 \kappa_n)} \quad (24)$$

egyenleteket adja.

Megjegyzések:

- Az $s_0(x)$ olyan *folytonos* függvény, amelyre teljesül, hogy

$$x + s_0(x) > y + s_0(y), \text{ ha } x > y,$$

hiszen a rugó nem szakadt el, és az egyes részei nem is előzhetik meg egymást.

- $v_0(x)$ -nek nem kell folytonosnak lennie, de minden x -re teljesülnie kell, hogy

$$|v_0(x)| < c,$$

különben lökéshullámok alakulnak ki, amelyekre nem jó a hullámegyenlet.

Ezen feltételek teljesülése ugyan szükséges, de nem elegendő ahhoz, hogy a mozgás során ne forduljon elő valamilyen „katasztrófa”: ha például $Mv^2/2 > Dl^2/2$, akkor biztos, hogy a rugó úgy deformálódik, hogy arra a jelen leírás nem lehet érvényes (a rugó deformációja biztos nem írható le a lineáris erő-törvénnyel, hisz azt feltételezve még nulla hosszúságúra összenyomva sem képes az M tömeg energiáját elnyelni).

A módusok energiája

A teljes energia

$$E = \int_0^l \left[\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} M \left(\frac{\partial s(l,t)}{\partial t} \right)^2 \quad (25)$$

Behelyettesítve, és a (21–22) ortogonalitásokat kihasználva megkapjuk, hogy ez az egyes módusok energiájának az összege:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{M}{2} \sin^2 \kappa_n \right) A_n^2 \quad (26)$$

Speciálisan a nulladik módusra (kis m/M esetén) igaz:

$$\frac{m}{2} + \frac{M}{2} \sin^2 \kappa_0 \approx \left(\frac{m}{3} + M \right) \sin^2 \kappa_0, \quad (27)$$

így annak az energiája

$$E_0 \approx \frac{1}{2} \omega_0^2 \left(\frac{m}{3} + M \right) A_0^2 \approx \frac{1}{2} D A_0^2. \quad (28)$$

Fontos megjegyezni, hogy (12–14) és (28) egyenletek csak a nulladik módusra vonatkoznak, és azt jelentik, hogy *ez a módus* jó közelítéssel (a különböző mennyiségek esetében $O(m/M)$, illetve $O((m/M)^2)$ relatív hibával) úgy írható le, mint egy $M + m/3$ tömeg A_0 amplitúdójú rezgése egy D direkciós erejű ideális rugón. Viszont az, hogy a mozgás egésze mennyire jó közelítéssel helyettesíthető az alpmódussal, az attól függ, hogy az adott *kezdeti feltételek* mellett milyen súlylál vannak jelen a magasabb felharmonikusok.

Két példa

A kezdeti feltételek jelentőségének a bemutatására két esetet részletesen is elemezzünk:

a) az M tömegnél fogva a rugót A -val kihúzzuk, majd magára hagyjuk, illetve,

b) az M tömegnek hirtelen (például ütközéssel) a rugó irányába eső v sebességet adunk.

Megoldás az a) kezdeti feltétel mellett.

Ebben az esetben

$$s_0(x) = A \frac{x}{l}, \quad (29)$$

$$v_0(x) = 0.$$

Ennek megfelelően (23) és (24) szerint minden $\phi_n = \pi/2$, és

$$A_n = \frac{2 m \sin \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} A. \quad (30)$$

Minden módushoz megadható az M tömeg rezgésének az adott módushoz tartozó amplitúdója

$$\mathcal{A}_n = A_n \sin \kappa_n = \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} A. \quad (31)$$

Tekintettel arra, hogy a $t = 0$ -ban ezek összege az M tömeg aktuális, azaz A kitérése,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n} = 1 \quad (32)$$

kell, hogy legyen. Speciálisan kis m/M esetén (egy elég fáradságos, éppen ezért itt nem részletezett sorfejtés szerint)

$$\mathcal{A}_0 \approx \left[1 - \frac{1}{45} \left(\frac{m}{M} \right)^2 \right] A, \quad (33)$$

illetve

$$\mathcal{A}_n \approx 2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{1}{(n\pi)^4} A, \text{ ha } n \geq 1. \quad (34)$$

Érdeemes megnézni az egyes módusokban tárolt energiát! Ha az A_n -eket behelyettesítjük az energiaképletbe

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \omega_n^2 \frac{2 m^2 \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^4} A^2 \quad (35)$$

adódik. Ebből, felhasználva, hogy

$$\frac{\omega_n^2 m}{\kappa_n^2} = D, \quad (36)$$

az

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^2} \frac{1}{2} D A^2 \quad (37)$$

összefüggést kapjuk, tehát az egyes módusokra eső energiahányad

$$\frac{E_n}{E} = \frac{2 m \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{\kappa_n^2}. \quad (38)$$

Figyelemre méltó, hogy

$$\frac{E_n}{E} = \frac{\mathcal{A}_n}{A}. \quad (39)$$

(Fontos, hogy az E_n -ekben nem csak a rezgő M , hanem a rugón kialakuló állóhullámok energiája is benne van, ezért lehetséges, hogy az \mathcal{A}_n -ek aránya azonos az E_n -ekével. Ilyen típusú azonosság csak speciális kezdeti feltételek mellett várható.)

Megoldás a b) kezdeti feltétel mellett.

Ez a kezdeti feltétel

$$s_0(x) \equiv 0, \quad v_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < l, \\ -v, & \text{ha } x = l. \end{cases} \quad (40)$$

Ennek megfelelően $\phi = 0$, és

$$A_n = - \frac{1}{\omega_n} \frac{2 M \sin \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v. \quad (41)$$

Minden módushoz rendelhető egy sebesség, ami az M tömeg rezgésének az adott módushoz tartozó sebességamplitúdója:

$$V_n = |A_n| \omega_n \sin \kappa_n = \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} v. \quad (42)$$

Mivel a $t = 0$ -ban ezek összege az M tömeg aktuális v sebessége, most a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} = 1 \quad (43)$$

összefüggésnek kell teljesülnie. Speciálisan kis m/M esetén

$$V_0 \approx \left(1 - \frac{1}{3} \frac{m}{M} \right) v, \quad (44)$$

és

$$V_n \approx \frac{2 m}{M} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{n^2} v, \text{ ha } n > 0. \quad (45)$$

Ha az A_n -eket behelyettesítjük az energiaképletbe,

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \frac{1}{2} M v^2 \quad (46)$$

adódik, tehát a teljes energia az egyes módusokon

$$\frac{E_n}{E} = \frac{2 M \sin^2 \kappa_n}{m + M \sin^2 \kappa_n} \quad (47)$$

arányban oszlik el. Ebben az esetben

$$\frac{E_n}{E} = \frac{V_n}{v}. \quad (48)$$

A két eset összehasonlítására az 1. táblázatban foglaltuk össze néhány mennyiség értékét különböző tömegarányok mellett. A második sorban a κ_0 értéke csak a teljesség kedvéért szerepel. A harmadik sorban T_0 az alaplómódus rezgésideje, míg T_{eff} az $M_{\text{eff}} = M + m/3$ effektív tömeggel számolt érték. $[(E - E_0)/E]_a$ és $[(E - E_0)/E]_b$ a rezgés teljes energiájából a felharmonikusokra eső rész relatív súlya az a), illetve b) kezdeti feltétel mellett. (A relatív eltéréseket, illetve súlyokat százalékban adtuk meg.) Szembetűnő, hogy a nulladik módus rezgésidejének T_{eff} -fel való közelítése egész nagy tömegarányig igen jó, még $m = M$ mellett is kisebb mint 1% relatív hibát okoz. Hasonló módon tág határokig jó közelítésnek látszik az a) esetben a

1. táblázat				
Néhány adat a tömegarány függvényében				
m/M	0,1	0,3	0,6	1,0
κ_0	0,3111	0,5218	0,7051	0,8603
$(T_0 - T_{\text{eff}})/T_0$	0,01%	0,08%	0,29%	0,66%
$[(E - E_0)/E]_a$	0,02%	0,17%	0,60%	1,39%
$[(E - E_0)/E]_b$	3,26%	9,40%	17,6%	27,0%

teljes mozgás helyett csak a nulladik módussal számolni: még azonos tömegek esetén is több mint 98% súllyal a nulladik módus gerjed. Nem ez a helyzet a b) kezdeti feltételnél, amikor már $m \sim 0,1M$ mellett is több mint 3%, $m \leq 0,3M$ esetén pedig már közel 10% a felharmonikusok súlya. Annak, hogy egy adott tömegarány mellett a b) esetben nagyobb súllyal gerjednek a felharmonikusok, mint az a)-ban, igen szemléletes oka van: az a) kezdeti feltétel „hasonlít” a nulladik módusra, míg a b) nem. A nulladik módushoz tartozó elmozdulás közelít az egyenletesen növekvőhöz, így az a) esetben a magasabb módusoknak csak azért kell megjelenüniük, hogy a kettő közötti kis eltérést kompenzálják. Ugyanakkor az alaplómódushoz egy közel egyenletesen növekvő sebességeloszlás tartozik, így a b) esetben a felharmonikusoknak olyan súllyal kell gerjedniük, hogy az alaplómódus sebességét a végpont kivételével mindenütt nullára egészítsék ki. Ha itt is lenne egy vx/l sebességeloszlás a rugó mentén, az a) esethez hasonlóan nagy súllyal gerjedne a nulladik módus.

Összefoglalandó az eddigieket

Elmondhatjuk: az egyik végén rögzített, tökéletesen rugalmas, de véges tömegű rugóból és egy hozzá erősített testből álló rendszer mozgását egy egy-dimenziós rugalmas közeg problémájaként tárgyaltuk. A rugót modellező rugalmas közeg mozgását egy szokásos hullámegyenlet írja le, amelyhez az egyik vég rögzítése, illetve a másik véghez csatlakozó test mozgását leíró Newton egyenlet peremfeltételként jelenik meg. Meghatároztuk a rendszer normál módusait és azt a szabályt, amellyel ezek a kezdeti feltételekhez illeszthetők. Két egyszerű, de lényegesen különböző kezdeti feltételt jelentő feladatban az alapharmonikus és a felharmonikusok viszonyát részletesen elemeztük. A mozgások leírása azzal lett volna teljes, ha a normál módusokat felösszegezzük. Ez az összegzés numerikusan bármikor, de analitikusan, zárt alakban csak extrém kis rugótömeg határesetben végezhető el. Szerencsére a rugó és a test mozgásának részletei más módon is felderíthetők. Ez lesz munkánk második részének tárgya.

EGY REMÉNYTELENNEK TŰNŐ VEZÉRLÉSI PROBLÉMA A KLASSZIKUS ÉS MODERN FIZIKA HATÁRÁN

Tél András, BME, Mechatronika alapszak, III. évfolyam
Tél Tamás, ELTE, Elméleti Fizikai Tanszék

A modern műszaki problémákban, így például a robotok tervezésekor gyakran lépnek fel irányítási, vezérlési feladatok. Ezek közül különösen érdekesek azok, amelyek során egy eredendően instabil állapotba kell eljuttatni a rendszert. Az alábbiakban bemutatunk egy első látásra reménytelennek tűnő mechanikai feladatot, amelynek megoldásához a modern fizika mára már klasszikussá vált eredményei adnak segítséget.

A vezérlési feladat

Tekintsünk egy egyenes mentén harmonikus rezgőmozgást végző m tömegű testet, amelynek rugóállandója egy *előírt* $D(t)$ függvény szerint változik időben. Az $x(t)$ kitérés-idő függvényt meghatározó mozgásegyenlet [1]

$$m \ddot{x}(t) = -D(t) x(t), \quad (1)$$

ahol a pont az idő szerinti deriválást jelöli. Az ennek az egyenletnek eleget tevő rendszer manapság érzékelők (szenzorok) és beavatkozó egységek (aktuátorok) segítségével könnyen megépíthető, bármilyen is a $D(t)$ függvény. A rugóra ható erő most tehát nem

csak a kitéréstől függ, hanem az időfüggő rugóállandó pillanatnyi értékétől is.¹ Az (1) egyenlet jobb oldala expliciten is függ az időtől, a differenciálegyenlet *nem autonóm*, vagyis a mozgás folytatását nem csak a test pillanatnyi helyzete és sebessége határozza meg, hanem egy külső hatás is. Az egyenlet olyan típusú, mint a gerjesztett rezgéseket leíró egyenletek [1], csak az időfüggés nem egy külső erőben, hanem a rugóállandóban jelenik meg. A mechanikai összenergia a súrlódás hiányában sem állandó, hiszen a rugóállandó időbeli változása miatt a rendszer energiát nyerhet vagy veszíthet.

Tegyük föl ráadásul, hogy a rugóállandó időben monoton módon csökken, egy idő után *előjelet vált*, s attól kezdve végig negatív marad. Az egyszerűség kedvéért egységnyi tömeget tekintve, s alkalmasan megválasztott időegységet használva, ezt kifejezhetjük úgy is, hogy a mozgásegyenletet az

$$\ddot{x}(t) = -[d - k(t)]x(t) \quad (2)$$

alakba írjuk. Itt $d > 0$ a nulla pillanathoz tartozó kezdeti rugóállandó, és $k(t)$ az időbeli változást leíró

¹ A rugóállandó szóhasználat annyiban jogos, hogy $D(t)$ továbbra is független a kitéréstől.